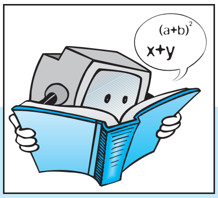
8

LE EQUAZIONI IRRAZIONALI



Per ricordare

★ Data una qualsiasi equazione $A(x) = B(x)$, sappiamo che ad essa si possono applicare i principi di equivalenza che consentono di aggiungere o togliere espressioni ai due membri oppure moltiplicare o dividere per un'espressione non nulla.
Questi principi però non ci dicono nulla sull'operazione di elevamento a potenza, vale a dire che non possiamo, in generale, dire che $A(x) = B(x)$ è equivalente a $[A(x)]^n = [B(x)]^n$.
Per esempio, nell'insieme dei numeri reali:

$x = 3$ non è equivalente a $x^2 = 9$ ma $x = 3$ è equivalente a $x^3 = 27$

Possiamo però dire che:

$x = 3$ è equivalente a $x^2 = 9$ se si pone la condizione che sia $x > 0$

$x = -3$ è equivalente a $x^2 = 9$ se si pone la condizione che sia $x < 0$

perchè in questo caso entrambe le equazioni hanno le stesse soluzioni.

Nell'elevamento a potenza occorre dunque precisare alcune condizioni che garantiscano l'equivalenza di due equazioni. In particolare possiamo dire che:

- elevando i due membri di un'equazione a potenza dispari siamo sicuri di ottenere un'equazione equivalente a quella data
- elevando i due membri di un'equazione a potenza pari siamo sicuri di ottenere un'equazione equivalente a quella data solo se i due membri hanno lo stesso segno.

L'insieme dei valori di x per i quali due equazioni sono equivalenti si dice **insieme di equivalenza**.
Per esempio, l'insieme di equivalenza delle due equazioni $x = -3$ e $x^2 = 9$ è l'insieme degli $x < 0$.

★ Un'equazione si dice **irrazionale** se l'incognita compare nell'argomento di un radicale; essa assume quindi la forma $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$.

Le considerazioni fatte al punto precedente ci permettono di trovare dei metodi per risolvere questo tipo di equazioni; distinguiamo il caso in cui l'indice della radice è pari da quello in cui è dispari.

- Se n **è dispari** l'equazione è equivalente a quella che si ottiene elevando a potenza n:

  $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ è equivalente a $A(x) = [B(x)]^n$

  Per risolvere un'equazione di questo tipo si segue quindi questa procedura:

- si isola il radicale
- si elevano a potenza n i due membri dell'equazione
- si risolve l'equazione ottenuta.

Per esempio:

$$\sqrt[3]{x-1}+7=x \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x-1}=x-7 \quad \rightarrow \quad x-1=(x-7)^3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^3-21x^2+146x-342=0 \quad \rightarrow \quad x=9$$

- Se n **è pari** il radicale al primo membro esiste solo se è $A(x) \geq 0$; il primo membro dell'equazione è dunque positivo o nullo e, affinché vi sia concordanza di segno fra i due membri dell'equazione, occorre che sia anche $B(x) \geq 0$; in queste ipotesi, l'equazione $A(x) = [B(x)]^n$ è equivalente a quella data.
Riassumendo queste considerazioni, per risolvere l'equazione $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ con n pari, si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

Tenendo poi presente che la condizione $A(x) \geq 0$ è superflua perchè l'equazione $A(x) = [B(x)]^n$ implica già che $A(x)$ sia positivo o nullo, per risolvere un'equazione irrazionale con un solo radicale di indice n pari si segue allora questa procedura:

- si isola il radicale
- si pone la condizione di concordanza di segno
- si elevano a potenza n i due membri dell'equazione
- si risolve l'equazione ottenuta.

In sostanza si risolve il sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$

Per esempio:

$\sqrt{1-3x} = 2x$ è equivalente al sistema $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 1-3x = 4x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=-1 \ \vee \ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

la sola soluzione accettabile è $x = \dfrac{1}{4}$

In alternativa a questo metodo, sempre nel caso in cui sia n pari, si può seguire questa procedura che non prevede di verificare a priori l'equivalenza delle equazioni:

- si isola il radicale
- si elevano a potenza n i due membri dell'equazione
- si risolve l'equazione ottenuta
- si procede alla verifica delle soluzioni.

Per esempio, per risolvere la precedente equazione si opera in questo modo:

$$\sqrt{1-3x} = 2x \quad \rightarrow \quad 1-3x=4x^2 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Verifica delle soluzioni:

- per $x = -1$: $\sqrt{1+3} = -2$ $2 = -2$ Falso
- per $x = \frac{1}{4}$: $\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Vero

La sola soluzione è quindi $\frac{1}{4}$.

★ Se l'equazione irrazionale contiene più radicali, in genere è necessario fare più operazioni di elevamento a potenza per poter risolvere l'equazione.
Se l'indice delle radici è pari, si deve allora sempre operare in modo da essere certi di passare ad un'equazione equivalente ponendo le opportune condizioni di concordanza di segno dei membri dell'equazione; in alternativa, basta effettuare una verifica finale delle soluzioni trovate.

Esercizi di Consolidamento

1 Stabilisci se le seguenti equazioni sono equivalenti:

a. $x - 4 = 2x - 1$ e $(x-4)^3 = (2x-1)^3$ [si]

b. $x - 1 = 3x + 2$ e $(x-1)^2 = (3x+2)^2$ [no]

c. $x + 1 = \pm(3x - 2)$ e $(x+1)^2 = (3x-2)^2$ [si]

d. $4x = x - 2$ e $(4x)^5 = (x-2)^5$ [si]

Determina l'insieme di equivalenza delle seguenti equazioni.

2 **ESERCIZIO SVOLTO**

$x - 3 = 5$ e $(x-3)^2 = 25$

Le due equazioni sono equivalenti se vi è concordanza di segno fra i due membri della prima equazione; allora, poichè il secondo membro è positivo, l'insieme di equivalenza è la soluzione dell'equazione

$$x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 3$$

3 **ESERCIZIO GUIDATO**

$2x - 3 = x - 4$ e $(2x-3)^2 = (x-4)^2$

Analogamente all'esercizio precedente, i due membri della prima equazione devono avere lo stesso segno; l'insieme di equivalenza è allora la soluzione dei sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

$\left[x < \frac{3}{2} \vee x > 4\right]$

4 $x-5=x+\frac{2}{3}$ e $(x-5)^2=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$ $\left[x<-\frac{2}{3} \vee x>5\right]$

5 $3x+6=x$ e $(3x+6)^3=x^3$ $[R]$

6 $\sqrt[3]{2x-4}=-2$ e $2x-4=-8$ $[R]$

7 $\sqrt{x+7}=x$ e $x+7=x^2$ $[x\geq 0]$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali contenenti un solo radicale.

8 ESERCIZIO GUIDATO

$\sqrt{x-1}=x-3$

Il radicale è di indice pari; la disequazione è quindi risolta dal sistema $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-1=(x-3)^2 \end{cases}$

$[S=\{5\}]$

9 $\sqrt{\frac{1}{3}x-1}=x-5$ $[S=\{6\}]$

10 $\sqrt{2-\frac{1}{3}(x+1)}=\frac{1}{3}(5+3x)$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right]$

11 $\sqrt{4-3x}=\frac{3x-4}{2}$ $\left[S=\left\{\frac{4}{3}\right\}\right]$

12 $\sqrt{2x^2-1}=x+2$ $[S=\{-1,5\}]$

13 $\sqrt{x^2-9}=x-1$ $[S=\{5\}]$

14 $\sqrt{4x^2-8x+4}=x+4$ $\left[S=\left\{-\frac{2}{3},6\right\}\right]$

15 $\sqrt{x^2+3x}=x+1$ $[S=\{1\}]$

16 $\frac{x+1}{3}=\sqrt{x^2-5x+4}$ $\left[S=\left\{\frac{7}{8},5\right\}\right]$

17 $\frac{2}{\sqrt{2x-5}}=3$ $\left[S=\left\{\frac{49}{18}\right\}\right]$

18 ESERCIZIO GUIDATO

$\sqrt[3]{x^2+2x}=x$

Il radicale è di indice dispari e per risolvere l'equazione basta elevare entrambi i membri al cubo:

$$x^2+2x=x^3$$

$[S=\{-1,0,2\}]$

19 $\sqrt[3]{6x(2+x)} = x+2$ $[S=\{-2\}]$

20 $\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2x-x^2}$ $[S=\{-1,3\}]$

21 $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$ $[S=\{1\}]$

22 $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{8}} = x+\dfrac{1}{2}$ $[S=\{0\}]$

23 $x+\sqrt{\dfrac{3}{2}x+3(1-x)} = \dfrac{7}{8}$ (Suggerimento: isola dapprima il radicale) $\left[S=\left\{-\dfrac{11}{8}\right\}\right]$

24 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-2x)(x-10)}+x+\dfrac{1}{2} = 0$ $[S=\varnothing]$

25 $\sqrt{x^2+\dfrac{3}{2}(9+7x)-\dfrac{1}{2}(x+9)}-3 = 2x$ $\left[S=\left\{0,-\dfrac{2}{3}\right\}\right]$

26 $\dfrac{1}{2}-\sqrt{(2x+1)^2+1} = x$ $\left[S=\left\{-\dfrac{7}{6},-\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

27 $1+\sqrt[3]{x^3+\dfrac{1}{27}} = x+\dfrac{1}{3}$ $[S=\varnothing]$

28 $1-\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{4}} = x$ $\left[S=\left\{\dfrac{5}{8}\right\}\right]$

29 $1-\sqrt{3x^2+5x-2} = 3x$ $\left[S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\right]$

30 $\sqrt[3]{3x^3-14} = \sqrt[3]{3}(x-2)$ $\left[S=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right\}\right]$

31 $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}+x = 2(x-1)$ $\left[S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{10}}{3}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali che contengono due o più radicali.

32 **ESERCIZIO SVOLTO**

$1+\sqrt{4-x} = \sqrt{1-2x}$

I metodo.

Poniamo le condizioni di esistenza dei radicali: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \leq \dfrac{1}{2}$

Poichè entrambi i membri sono positivi ($1+\sqrt{4-x}$ è positivo perché somma di numeri positivi), possiamo elevare al quadrato ottenendo l'equazione

$$1+4-x+2\sqrt{4-x} = 1-2x \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{4-x} = -x-4$$

Per un nuovo elevamento al quadrato dobbiamo porre la condizione di concordanza dei segni fra i due membri e rivalutare l'insieme di equivalenza:

$$\begin{cases} -x-4 \geq 0 \\ x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{nuovo insieme di equivalenza} \quad x \leq -4$$

Elevando al quadrato otteniamo l'equazione

$$4(4-x) = (-x-4)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + 12x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} 0 \\ -12 \end{cases}$$

Poichè solo la seconda soluzione appartiene all'insieme di equivalenza, $S = \{-12\}$.

II metodo.

Eleviamo al quadrato senza porci problemi di esistenza dei radicali o di concordanza di segni fra i due membri dell'equazione:

$$2\sqrt{4-x} = -x-4$$

ed elevando di nuovo al quadrato $x^2 + 12x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} 0 \\ -12 \end{cases}$

Procediamo alla verifica delle soluzioni:

- per $x = 0$:

  $1 + \sqrt{4-0} = \sqrt{1-0} \quad \rightarrow \quad 1 + 2 = 1 \qquad x = 0$ non è soluzione dell'equazione

- per $x = -12$:

  $1 + \sqrt{4+12} = \sqrt{1+24} \quad \rightarrow \quad 5 = 5 \qquad x = -12$ è soluzione dell'equazione.

33 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\sqrt{\frac{1-x}{3}} - 1 = \sqrt{x+2}$$

Prima di elevare al quadrato, conviene portare il termine -1 al secondo membro in modo da avere entrambi i membri positivi:

$$\sqrt{\frac{1-x}{3}} = \sqrt{x+2} + 1$$

Poni adesso le condizioni di esistenza dei radicali ed eleva al quadrato. $[S = \{-2\}]$

34 $\sqrt{x^2 - 6x + 8} = \sqrt{2x^2 + 1}$ $[S = \{-7, 1\}]$

35 $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x + 4}$ $[S = \{-1, 3\}]$

36 $\sqrt{3x - 4} - \sqrt{x - \dfrac{2}{3}} = 2$ $\left[S = \left\{\dfrac{29}{3}\right\}\right]$

37 $2\sqrt{x+1} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2 - x}$ $\left[S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

38 $\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2} - 1 = \sqrt{\dfrac{1}{4} - 2x}$ $[S = \varnothing]$

39 $\sqrt{\dfrac{x-1}{4}}+x=1+\sqrt{x-x^2}$ $[S=\{1\}]$

40 $\sqrt{1-x}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ $[S=\{1\}]$

41 $\sqrt{2x-8}+\sqrt{x+1}=0$ $[S=\varnothing]$

(Suggerimento: la somma di due numeri positivi è nulla solo se sono nulli contemporaneamente i due addendi)

42 $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-2x-3}=0$ $[S=\{3\}]$

43 $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}\right]$

44 $\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+\sqrt{x-3}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}(2\sqrt{19}+1)\right\}\right]$

45 $\sqrt{2x}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{6x+2}$ $\left[S=\left\{\frac{25}{6}\right\}\right]$

46 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x+1}$ $\left[S=\left\{\frac{4}{3}\sqrt{3}+1\right\}\right]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali di vario genere.

1 $\sqrt[3]{2x^3-(x+1)^3+1}=x$ $[S=\{-1,0\}]$

2 $(x^2-5x)\sqrt[3]{x-2}=0$ $[S=\{0,2,5\}]$

3 $(x-3)=\sqrt{\dfrac{4+x^2}{3-x}}$ $[S=\varnothing]$

4 $\dfrac{x-1}{3x}\cdot\sqrt{\dfrac{9x^2}{x^2-2x+1}}=3x$ $[S=\varnothing]$

5 $2x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{8x^3+5x^2-25}}=1$ $[S=\{\pm\sqrt{5}\}]$

6 $\sqrt{1+2x}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x}$ $[S=\{0\}]$

7 $\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2},4\right\}\right]$

8 $\sqrt[3]{x+1}=1-\sqrt[3]{x}$ $[S=\{0\}]$

9 $3\sqrt{x+2}=\sqrt{5x}+\dfrac{5}{\sqrt{x+2}}$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

10 $\sqrt{x-2}-1=\sqrt{1-x^2}$ $[S=\varnothing]$

11 $\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\sqrt{13-x}$ $\left[S=\left\{4,\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

12 $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}-1}=\dfrac{10}{3\sqrt{3x}-1}$ $\left[S=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{25}{27}\right\}\right]$

13 $\dfrac{1}{2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{1+2x}+3}{1+2x}$ $\left[S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\right]$

14 $\dfrac{4-8x^2}{\sqrt{2x}+1}=4\left(1-\sqrt{2x}\right)$ $[S=\{0,1\}]$

15 $\sqrt{\dfrac{1-4x}{4}}=1+\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}$ $[S=\{-2\}]$

16 $\sqrt{4x+3x^2-4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}-x$ $[S=\{1\}]$

17 $\dfrac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{4-\sqrt{x}}$ $\left[S=\left\{\dfrac{81}{16}\right\}\right]$

18 $2\dfrac{x+1}{\sqrt{12x-2x^2}}=1+\sqrt{\dfrac{x}{12-2x}}$ $\left[S=\left\{2,\dfrac{2}{3}\right\}\right]$

19 $\dfrac{x-9}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}+2-x}$ $\left[S=\left\{1,\dfrac{1}{16}\right\}\right]$

20 $2\sqrt{\sqrt{1-x}-\dfrac{1}{4}}-1=0$ $\left[S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}\right]$

21 $\dfrac{2}{3}\sqrt{(3x+1)}=\sqrt{10-6x}-\dfrac{3x+7}{3\sqrt{3x+1}}$ $\left[S=\left\{-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{3}\right\}\right]$

22 $\sqrt{x+4+\sqrt{(x+1)(x-2)}}=\sqrt{3x}$ $[S=\{3,2\}]$

23 $\sqrt{\sqrt{x^2-2x-3}+6x+7}=x+2$ $\left[S=\left\{3,-1,1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\right\}\right]$

24 $\sqrt{2x-\sqrt{1-2x}}=1-\sqrt{2x}$ $\left[S=\left\{\dfrac{8}{25}\right\}\right]$

25 $\sqrt{(x+4)\sqrt{\dfrac{x-6}{x^2-16}}}=\sqrt[4]{x-4}$ $\left[S=\left\{\dfrac{20}{3}\right\}\right]$

26 $\sqrt{\sqrt{\dfrac{3}{2}-x}+\sqrt{2x}+7}=3$ $\left[S=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{18}\right\}\right]$

27 $\sqrt{\sqrt{2}x-1}+(3-\sqrt{2})\dfrac{x}{\sqrt{\sqrt{2}x-1}}=2\sqrt{\sqrt{2}x+1}$ $[S=\{1,5\}]$