Matematica

Anno 4
Grafico di funzione

RepetitaRepetita

by Treccani.it

Introduzione

In questa lezione impareremo a disegnare il **grafico** di una **funzione reale**.

Per fare ciò è necessario studiare alcune caratteristiche salienti della funzione che consentono di ricavarne il grafico.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- definire il concetto di studio di una funzione reale
- studiare una funzione reale e tracciarne il grafico

In questa lezione impareremo a disegnare il grafico di una funzione reale. Per fare ciò è necessario studiare alcune caratteristiche salienti della funzione che consentono di ricavarne il grafico.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- definire il concetto di studio di una funzione reale;
- studiare una funzione reale e tracciarne il grafico.

Studio di una funzione reale: definizione

Studio di una funzione reale ➡ insieme delle **procedure** utili a determinare le caratteristiche di una funzione $y=f(x)$.

Scopo finale: disegnare il **grafico** della funzione.

Schema per lo studio di funzioni:

1. dominio di esistenza
2. simmetrie o periodicità
3. intersezioni con gli assi cartesiani
4. segno della funzione
5. comportamento alla frontiera del dominio e asintoti
6. crescenza della funzione e massimi e minimi relativi
7. concavità della funzione e flessi

Per studio di una funzione reale si intende l'insieme di tutte le procedure utili alla determinazione delle principali caratteristiche di una funzione $y=f(x)$. Scopo ultimo dello studio di una funzione è quello di disegnarne il grafico.

Per lo studio di funzioni è utile procedere secondo il seguente schema:

- determinare il dominio di esistenza della funzione;
- riconoscere eventuali simmetrie o periodicità;
- individuare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani;
- studiare il segno della funzione;
- studiare il comportamento della funzione alla frontiera del dominio ed individuare gli eventuali asintoti;
- studiare la crescenza o decrescenza della funzione ed individuare gli eventuali massimi e minimi relativi, tramite lo studio della derivata prima;
- studiare la concavità della funzione e gli eventuali flessi, tramite l'analisi della derivata seconda.

Dominio della funzione

Per determinare il **dominio** di una funzione, dobbiamo imporre le condizioni di esistenza.
Possiamo ricondurci a tre casi fondamentali:

- **funzioni fratte**: denominatore diverso da zero
- **funzioni con radicali di indice pari**: il radicando deve essere maggiore o uguale a zero
- **funzioni logaritmiche**: l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero

Al di fuori di questi casi e delle possibili loro combinazioni, il dominio di una funzione reale è tutto ***R***.

Esempio di svolgimento:

Calcolare il dominio della funzione:

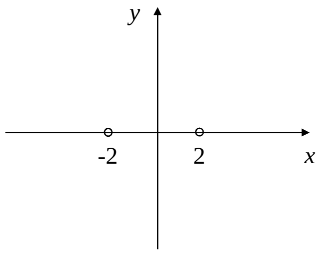
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

È necessario imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

Il dominio della funzione è tutto l'asse reale tranne i valori

$$x = \pm 2$$



Per la determinazione del dominio di una funzione dobbiamo imporre le condizioni di esistenza della funzione stessa. In generale è possibile dedurre tali condizioni riconducendosi in modo opportuno a quelle necessarie in tre casi fondamentali:

- funzioni fratte: bisogna imporre che il denominatore diverso da zero;
- funzioni con radicali di indice pari: il radicando deve essere maggiore o uguale a zero;
- funzioni logaritmiche: l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero.

Al di fuori di questi tre casi e di tutte le possibili loro combinazioni (che si presentano ad esempio nel caso di funzioni composte), il dominio di una funzione reale è tutto l'insieme ***R*** dei numeri reali.

Facciamo un esempio. Calcoliamo il dominio della funzione $f(x)=1/(x^2-4)$. L'incognita x compare al denominatore quindi la funzione è una funzione fratta.

Per trovare le restrizioni al dominio è necessario imporre che il denominatore non si azzeri, cioè che x^2-4 sia diverso da zero.

Risolvendo si ottiene che il dominio è tutto l'asse reale ad esclusione dei valori $x=2$ e $x=-2$.

Simmetrie ed intersezioni con gli assi

Ricerca di eventuali **simmetrie** e **periodicità**:

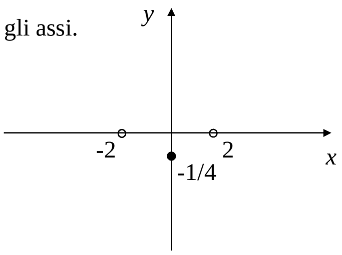
- **funzione pari**: $f(-x)=f(x)$
- **funzione dispari**: $f(-x)=-f(x)$
- **funzioni periodiche**, con periodo T: $f(x+T)=f(x)$

Individuazione delle **intersezioni** con gli assi cartesiani:

- intersezioni con l'asse x si ottengono risolvendo l'equazione: $f(x)=0$
- intersezioni con l'asse y si ottengono risolvendo l'equazione: $y=f(0)$

Esempio di svolgimento:

Verificare la parità della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ e le intersezioni con gli assi.



Calcoliamo

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-4}=\frac{1}{x^2-4}=f(x)$ $\Rightarrow$ la funzione è pari.

Intersezione con l'asse x: $f(x)=0$ impossibile

Intersezione con l'asse y: $y=f(0)=-\frac{1}{4}$

Dopo aver determinato il dominio della funzione, esaminiamo *f* per ricercare eventuali simmetrie e periodicità; ovvero verifichiamo se *f* è una funzione pari: $f(-x)=f(x)$, oppure dispari: $f(-x)=-f(x)$, oppure periodica di periodo *T*: $f(x+T)=f(x)$.

Nel caso *f* presenti una di queste regolarità, è possibile studiare il comportamento della funzione solo in un intervallo più ristretto del dominio.

Il passaggio successivo nello studio di una funzione è l'individuazione delle eventuali intersezioni con gli assi.

Si considera l'intersezione con l'asse *x*, cercando le soluzioni dell'equazione $f(x)=0$, e con l'asse *y*, ricercando gli zeri dell'equazione $y=f(0)$.

Verifichiamo, come esempio, che la funzione $f(x)=1/(x^2-4)$ è una funzione pari. Calcoliamo $f(-x)$ sostituendo $-x$ ad x. Dato che $f(-x)=f(x)$, la funzione è pari.

Calcoliamo ora le intersezioni con gli assi di tale funzione. L'equazione $f(x)=0$ non ha soluzioni, quindi *f* non interseca l'asse *x*. Invece la funzione calcolata in $x=0$ è uguale a -1/4, che risulterà essere il punto di intersezione di *f* con l'asse *y*.

Segno e asintoti della funzione

Il **segno della funzione** determina gli intervalli in cui la funzione è positiva o negativa, ovvero si trova al di sopra o al di sotto dell'asse x. Il segno di f si ottiene risolvendo la disequazione $f(x)>0$ (o $f(x)<0$).

Individuiamo eventuali **asintoti**:

- asintoti orizzontali: $y=l$ è asintoto orizzontale $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$
- asintoti verticali: $x=x_0$ è asintoto verticale $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty$

Esempio di svolgimento:

Calcolare il segno e gli asintoti della funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Determiniamo il segno di f: $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$

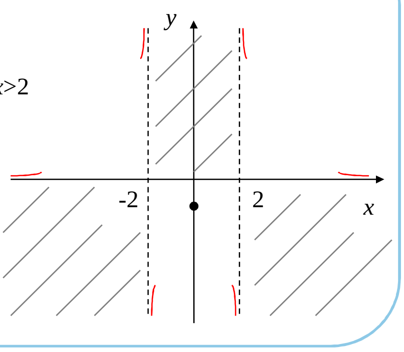
Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2-4}=0$

La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x\to -2^{\pm}}\frac{1}{x^2-4}=\mp\infty \qquad \lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{1}{x^2-4}=\pm\infty$$

Le rette $x=-2$ e $x=2$ sono asintoti verticali per la funzione.



Il passo successivo nella studio di una funzione è determinare gli intervalli in cui essa è positiva o negativa, ovvero si trova al di sopra o al di sotto dell'asse delle x, tramite lo studio del segno della funzione. A tal scopo è sufficiente risolvere la disequazione $f(x)>0$, o equivalentemente $f(x)<0$.

Poi individuiamo la presenza di eventuali asintoti, quelle rette verso le quali si avvicina il grafico della funzione, studiando il comportamento della funzione sulla frontiera del dominio di definizione.

Gli asintoti orizzontali si trovano calcolando i limiti per x che tende a + o - infinito. Se tale limite esiste ed è finito allora esiste un asintoto orizzontale.

Gli asintoti verticali si trovano calcolando il limite per x che tende ad uno dei valori di frontiera del dominio da destra o da sinistra. Se tale limite vale + o – infinito allora esiste un asintoto verticale.

Riconsideriamo l'esempio fatto e determiniamo il segno e gli asintoti della funzione $f(x)=1/(x^2-4)$.

Note

Studiamo il segno di *f* risolvendo la disequazione *f*(*x*)>0. Con semplici calcoli otteniamo che la funzione è positiva tra – ∞ e -2 e tra 2 e +∞, ed è quindi negativa nell'intervallo (-2,2).

Per determinare l'asintoto orizzontale, calcoliamo il limite della funzione per *x* che tende a + o meno infinito. Il risultato di tale limite è zero, quindi concludiamo che *y*=0 è un asintoto orizzontale.

Infine calcoliamo gli asintoti verticali considerando il limite di *f* per *x* che tende ai valori escludi dal dominio, ovvero -2 e 2, da destra e da sinistra. Dato che tali limiti sono infiniti, deduciamo che le rette *x*=-2 e *x*=2 sono asintoti verticali della funzione considerata.

Nel grafico sono mostrate le caratteristiche di *f* appena determinate.

Studio delle derivate

Studiamo il **segno** della **derivata prima**, per individuarne la **crescenza**:

- $f'(x)>0$: la funzione f cresce
- $f'(x)<0$: la funzione f decresce
- $f'(x_0)=0$: la funzione ha un massimo, un minimo relativo o un flesso orizzontale in x_0

Il **segno** della **derivata seconda** ci fornisce la **concavità** della funzione:

- $f''(x)>0$: la funzione f ha la concavità rivolta verso l'alto (funzione convessa)
- $f''(x)<0$: la funzione f ha la concavità rivolta verso il basso (funzione concava)
- $f''(x_0)=0$: la funzione può presentare un flesso in x_0

A questo punto dello studio di una funzione è utile analizzare le sue derivate per capire altre caratteristiche della funzione esaminata.

Tramite lo studio del segno della derivata prima è possibile individuare dove la funzione cresce o decresce.

Negli intervalli in cui la derivata prima è positiva, la funzione è crescente; mentre negli intervalli in cui la derivata prima è negativa, la funzione è decrescente.

Nei punti in cui la derivata prima si azzera, la funzione può presentare un punto di massimo, di minimo relativo o di flesso orizzontale.

Il segno della derivata seconda invece ci permette di stabilire la concavità della funzione.

Negli intervalli in cui la derivata seconda è positiva, la funzione è convessa; mentre negli intervalli in cui la derivata seconda è negativa la funzione è concava.

Nei punti in cui la derivata seconda si azzera la funzione può presentare un flesso, cioè un punto in cui la funzione passa da concava a convessa.

Note

Studio delle derivate: esempio

Esempio di svolgimento:

Calcolare massimi, minimi relativi, flessi e la concavità della funzione: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

Calcoliamo la derivata prima: $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$

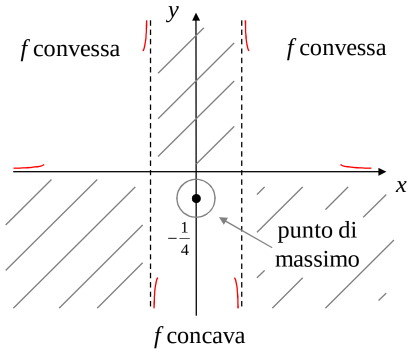
La derivata si azzera in x=0, è positiva per x<0 e negativa per x>0. Quindi in x=0 è presente un massimo.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x)=-\frac{2(x^2-4)^2-8x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}=\frac{6x^4-16x^2-32}{(x^2-4)^4}$$

La derivata seconda è positiva per x<-2 e x>2, quindi la f è convessa in tali intervalli e concava in (-2,2).

La funzione non ha flessi.



Torniamo ora al nostro esempio. Determiniamo gli eventuali massimi, minimi e flessi della funzione $f(x)=1/(x^2-4)$, e studiamo la sua concavità.

Calcoliamo la derivata prima e con semplici calcoli otteniamo che f' è nulla in x=0, positiva per x<0 e negativa per x>0. Segue che la funzione è crescente per le x negative e decrescente per quelle positive, quindi il punto x=0 è un punto di massimo relativo per la funzione.

Calcoliamo la derivata seconda, che risulterà essere positiva per x<-2 e x>2. Quindi la funzione sarà convessa in $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ e concava in (-2,2).

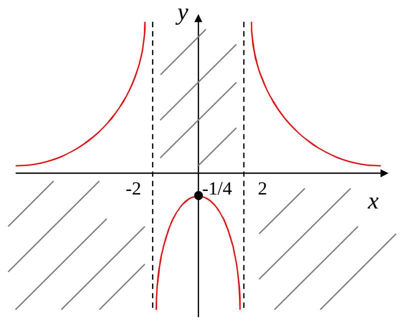
Inoltre, dato che la derivata seconda non si annulla mai, deduciamo che f non ha flessi.

Note

Grafico della funzione

Esempio di svolgimento:

Disegniamo il grafico della funzione: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$



(1) Dominio: $x \neq \pm 2$

(2) Simmetrie: funzione pari $f(-x)=f(x)$

(3) Intersezioni con gli assi: $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$

(4) Segno: la funzione è positiva per $x<-2 \cup x>2$

(5) Asintoti: $x=-2$, $x=2$, $y=0$

(6) Crescenza, massimi e minimi: la funzione cresce per $x<0$ e ha un massimo in $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$

(7) Concavità: la funzione è convessa per $x<-2$ e $x>2$, concava per $-2<x<2$.

Ora riassumiamo i risultati fin qui ottenuti e disegniamo il grafico della funzione $f(x)=1/(x^2-4)$.

Abbiamo visto che il dominio è tutto l'asse reale tranne i valori $x=2$ e $x=-2$.

La funzione è una funzione pari e quindi sarà simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Il grafico interseca solo l'asse delle ordinate nel punto $x=0$ e $y=-1/4$.

Essa è positiva negli intervalli $x<-2$ e $x>2$, mentre è negativa nel rimanente intervallo del dominio.

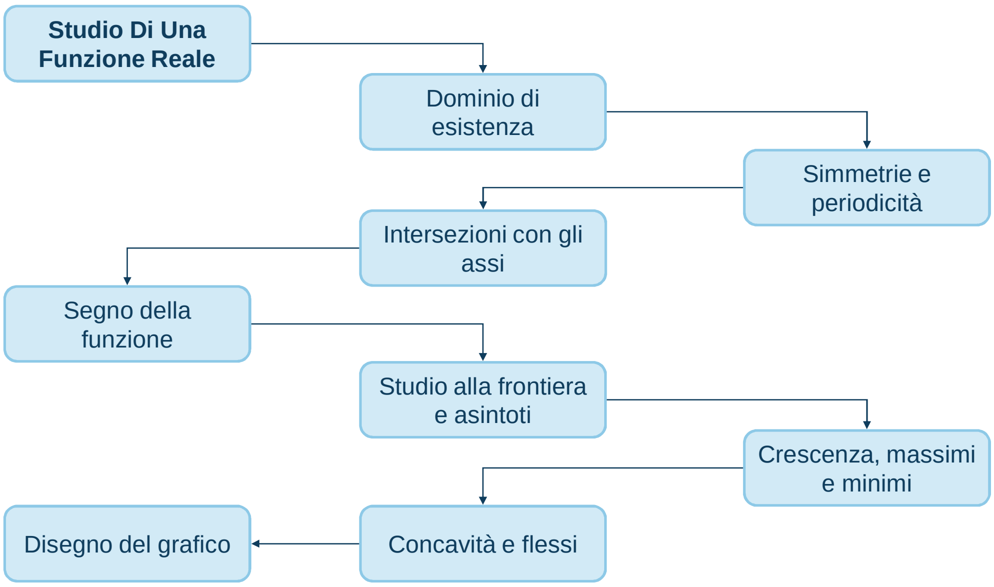
Studiando i limiti sulla frontiera (per x che tende a 2, a -2, a meno infinito e a più infinito) otteniamo due asintoti verticali ($x=2$ e $x=-2$) ed uno orizzontale ($y=0$).

Tramite lo studio della derivata prima abbiamo dedotto che la funzione cresce per $x<0$, ha un massimo relativo in $x=0$ e decresce per $x>0$.

La derivata seconda non ha zeri, quindi la funzione non ha flessi. Dal suo segno ricaviamo che la funzione è convessa per $x<-2$ e $x>2$ e concava nel rimanente intervallo.

Dalle informazioni ottenute deduciamo che il grafico della funzione è quello mostrato in video.

Conclusione



Riepiloghiamo adesso quello che abbiamo visto in questa lezione. Dopo aver definito una funzione reale, abbiamo visto quali sono i passi necessari per poterla rappresentare graficamente su un sistema di assi cartesiani:

- bisogna innanzitutto ricercare il dominio di esistenza della funzione;
- verificare la presenza di eventuali simmetrie o periodicità;
- fissare alcuni punti del grafico cercando l'intersezione della funzione con gli assi coordinati;
- in seguito si valuta il segno della funzione per individuare in quali intervalli la funzione si trovi al di sopra o al di sotto dell'asse delle ascisse;
- si valuta il comportamento della funzione alla frontiera del dominio e si cercano gli eventuali asintoti.

Tramite lo studio delle derivate, prima e seconda, si individua la crescenza della funzione, con massimi e minimi relativi, e la concavità, con gli eventuali flessi.

Infine si utilizzano tutte queste informazioni per disegnare il grafico della funzione in un sistema di riferimento cartesiano.