EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Prof. Califano Maurizio

Questi appunti non sostituiscono la teoria, ma sono solo dei consigli pratici.

Prima di tutto: "*che cosa è il valore assoluto di un numero?*"
Il valore assoluto è quella legge che ad un numero (positivo o negativo) associa sempre e solo la sua parte positiva.
In pratica:

$|3| = 3$ ma anche $|-3| = 3$

"*Come si esprime questo concetto se al posto del numero ho una funzione?*"

Data una funzione $f(x)$, allora il valore assoluto $|f(x)|$ dipende dal segno della funzione, ciò si scrive nel seguente modo:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Lo studio del valore assoluto può essere riassunto in due semplici casi; il primo se il valore assoluto deve essere confrontato con un numero, mentre il secondo se esso deve essere confrontato con una funzione (o più funzioni).

Distinguiamo i due casi:

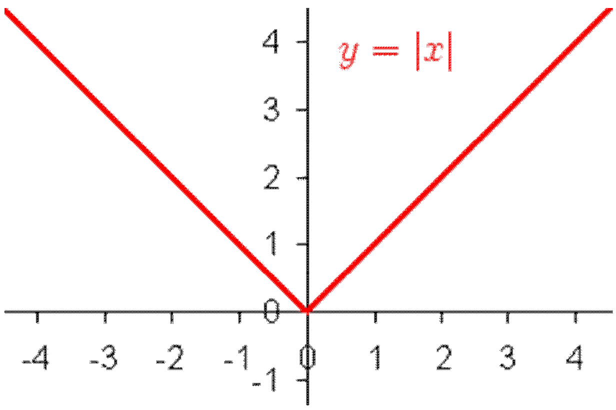
1° caso) Confronto con un numero: $|f(x)| = n$

Potrei dire semplicemente che in questo caso la precedente equazione si risolve ponendo:

$$f(x) = n \quad \vee \quad f(x) = -n$$

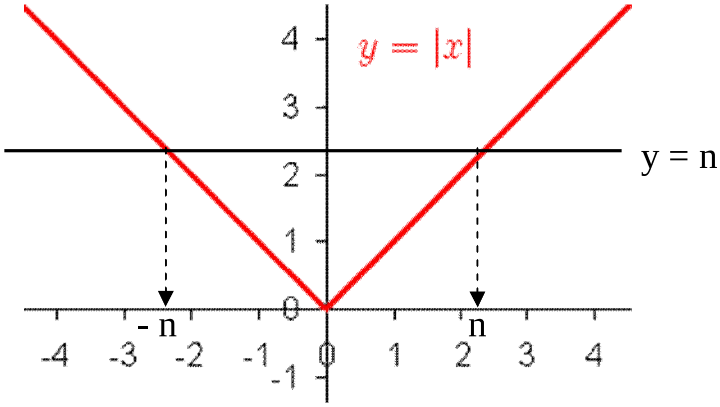
Però credo che sia il caso di spiegare (geometricamente) perché si arriva a questa conclusione.
Per chi non è interessato a tale spiegazione, può tranquillamente passare avanti.

Il valore assoluto $|x|$ presenta il seguente grafico:



(infatti se $|1| = |-1| = 1$, $|2| = |-2| = 2, \ldots$).

Quindi se devo risolvere $|f(x)| = n$ pongo $f(x) = X$ e quindi ho $|X| = n$ il cui grafico è quello visto su. Prendo, a questo punto, la retta y=n e la confronto con il valore assoluto:



si nota subito che la funzione $|X|$ incontra la retta y in due punti, -n e n. Quindi si ha:

che $X = -n$ e $X = n$ da ciò, ritornando alla funzione $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = -n \quad \vee \quad f(x) = n}$$

2° caso) Confronto con una funzione: $|f(x)| = g(x)$

E' possibile risolvere questa equazione in due modi. Il primo, seguendo la falsa riga del precedente metodo imponendo che la funzione $g(x) \geq 0$ visto che nel caso in cui $g(x) < 0$ l'equazione non sarebbe mai verificata.
visto però che questo tipo di ragionamento può essere fatto solo in questo caso allora preferisco mostrare quello più generico che serve sia quando il valore assoluto da confrontare è uno, sia quando sono più di uno.

Passo a descrivere il procedimento:

prima di tutto si studia il segno della "funzione argomento" del valore assoluto.
Se $f(x) \geq 0$ *allora posso riscrivere la traccia nel seguente modo* $f(x) = g(x)$
Se $f(x) < 0$ *allora posso riscrivere la traccia nel seguente modo* $-f(x) = g(x)$

Quindi riassumendo, ho due sistemi da studiare:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{V} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

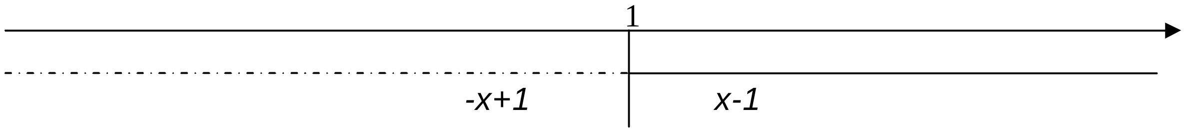
Le soluzioni x di entrambi i sistemi saranno i valori per i quali è verificata l'equazione!!!

Faccio subito un esempio: $|x-1| = 2x-1$

Se $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ allora si ha $x-1 = 2x-1$

Se $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ allora si ha $-x+1 = 2x-1$

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli



e di conseguenza anche l'equazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

Quindi devo risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" dell'equazione negli intervalli determinati dal v.a.

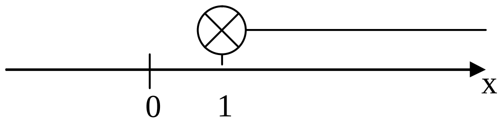
$$S_1: \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1=2x-1 \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} x<1 \\ -x+1=2x-1 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

Risolviamo S_1

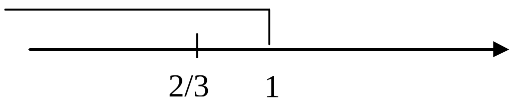
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0 \end{cases}$$



La soluzione del sistema S_1 è $\varnothing$ perché x=0 si trova al di fuori del campo delle soluzioni ≥ 1

Risolviamo S_2

$$\begin{cases} x<1 \\ -x+1=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ -x-2x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ -3x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$



La soluzione del sistema S_2 è 2/3.

Quindi la soluzione finale: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Nel caso in cui i valori assoluti sono più di uno, il ragionamento non cambia. Ma vediamo come procedere.

Esempio *equazione con due valori assoluti:*

$$|x| - |x+2| = 0$$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale ***x***

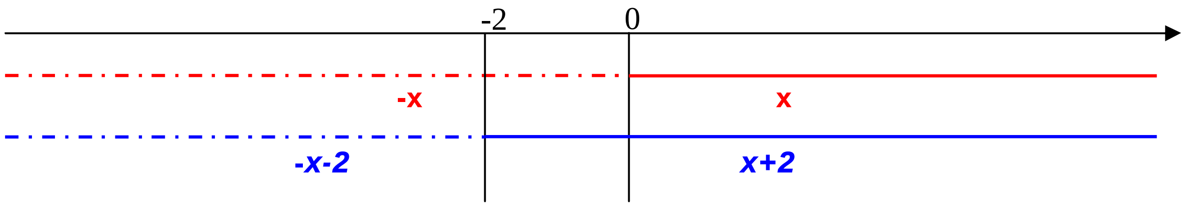
quando $x < 0$ il valore assoluto vale ***-x*** quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

Studiamo il secondo v.a. $|x+2|$

quando $x+2 \geq 0$ ossia $x \geq -2$ il valore assoluto vale ***x+2***

quando $x+2 < 0$ ossia $x < -2$ il valore assoluto vale ***-x-2***

Mettendo insieme i due valori assoluti, abbiamo:



dividiamo l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ in tre parti:

quando $x < 2$ l'equazione assume la forma $-x-(-x-2)=0$

quando $-2 \leq x < 0$ l'equazione assume la forma $-x-(x+2)=0$

quando $x \geq 0$ l'equazione assume la forma $x-(x+2)=0$

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x < 2 \\ -x-(-x-2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x < 0 \\ -x-(x+2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x-(x+2)=0 \end{cases}$$

La soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_1 :

$$\begin{cases} x < 2 \\ -x+x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ +2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_1 : \varnothing$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_2 :

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -x-(x+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -x-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ -2x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \; S_2 : x=-1$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_3 :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-(x+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_3 : \varnothing$$

Quindi la soluzione finale: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow x = -1$

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Per risolve le disequazioni con il valore assoluto, seguirò la falsariga utilizzata per risolvere le equazione, logicamente con le dovute diversificazioni.

Distinguiamo i due casi:

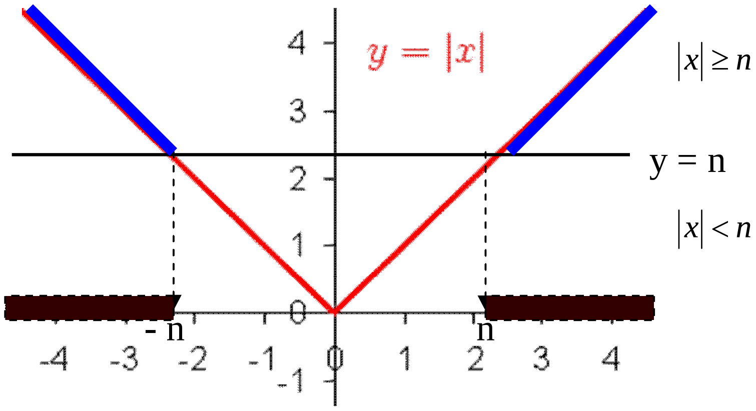
1° caso) Confronto con un numero: $|f(x)| \geq n$

Potrei dire semplicemente che in questo caso la precedente equazione si risolve ponendo:

$$f(x) \leq -n \ \vee \ f(x) \geq n$$

Però credo che sia il caso di spiegare (geometricamente) perché si arriva a questa conclusione. Per chi non è interessato a tale spiegazione, può tranquillamente passare avanti.

Quindi se devo risolvere $|f(x)| \geq n$ pongo $f(x) = \mathrm{X}$ e quindi ho $|\mathrm{X}| \geq n$ il cui grafico è quello visto su. Prendo, a questo punto, la retta y=n e la confronto con il valore assoluto:



si nota subito che la funzione $|\mathrm{X}|$ "sta al di sopra" della retta y in due parti, da $]-\infty, -n] \ \cup \ [n, +\infty[$. Quindi si ha:
che $\mathrm{X} \leq -n$ e $\mathrm{X} \geq n$ da ciò, ritornando alla funzione $f(x)$:

$$\boxed{f(x) \leq -n \ \vee \ f(x) \geq n}$$

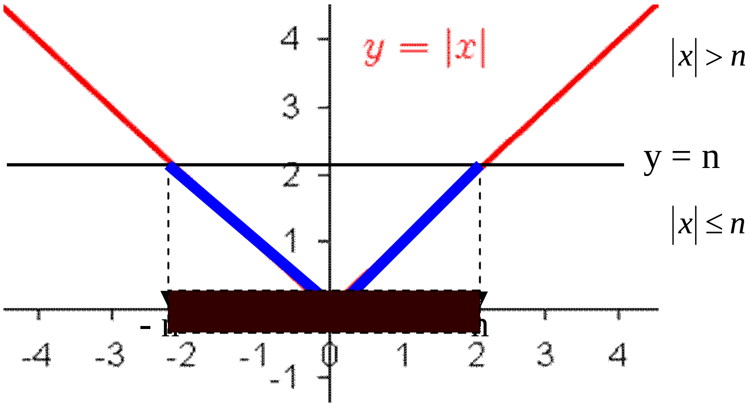
Nel caso in cui $|f(x)| \leq n$

Potrei dire semplicemente che in questo caso la precedente equazione si risolve ponendo:

$$-n \leq f(x) \leq n$$

Però credo che sia il caso di spiegare (geometricamente) perché si arriva a questa conclusione. Per chi non è interessato a tale spiegazione, può tranquillamente passare avanti.

Quindi se devo risolvere $|f(x)| \le n$ pongo $f(x) = X$ e quindi ho $|X| \le n$ il cui grafico è quello visto su. Prendo, a questo punto, la retta y=n e la confronto con il valore assoluto:



si nota subito che la funzione $|X|$ "sta al di sotto" della retta y in due parti, da $[-n;+n]$. Quindi si ha:

che $\begin{cases} X \le n \\ X \ge -n \end{cases}$ da ciò, ritornando alla funzione $f(x)$:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) \le n \\ f(x) \ge -n \end{cases}}$$

2° caso) Confronto con una funzione: $|f(x)| \ge g(x)$

E' possibile risolvere questa equazione in due modi. Il primo, seguendo la falsa riga del precedente metodo imponendo che la funzione $g(x) \ge 0$ visto che nel caso in cui $g(x) < 0$ l'equazione non sarebbe mai verificata.
visto però che questo tipo di ragionamento può essere fatto solo in questo caso allora preferisco mostrare quello più generico che serve sia quando il valore assoluto da confrontare è uno, sia quando sono più di uno.

Passo a descrivere il procedimento:

prima di tutto si studia il segno della "funzione argomento" del valore assoluto.
Se $f(x) \ge 0$ *allora posso riscrivere la traccia nel seguente modo* $f(x) \ge g(x)$
Se $f(x) < 0$ *allora posso riscrivere la traccia nel seguente modo* $-f(x) \ge g(x)$

Quindi riassumendo, ho due sistemi da studiare:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases} \quad \text{V} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \ge g(x) \end{cases}$$

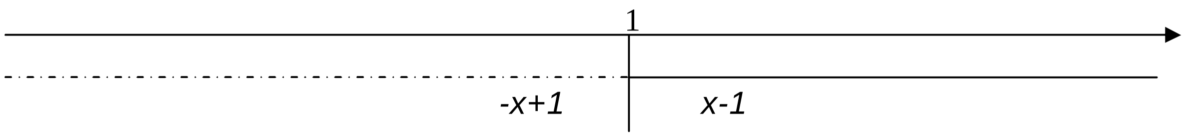
Le soluzioni x di entrambi i sistemi saranno i valori per i quali è verificata l'equazione!!!

Faccio subito un esempio: $|x-1| \geq 2x-1$

Se $x-1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ allora si ha $x-1 \geq 2x-1$

Se $x-1 < 0$ ossia $x < 1$ allora si ha $-x+1 \geq 2x-1$

quindi il valore assoluto $|x-1|$ assume valori diversi nei due intervalli



e di conseguenza anche l'equazione assume "forme diverse" in ciascuno di questi intervalli:

Quindi devo risolvere due sistemi, contenenti le "forme diverse" dell'equazione negli intervalli determinati dal v.a.

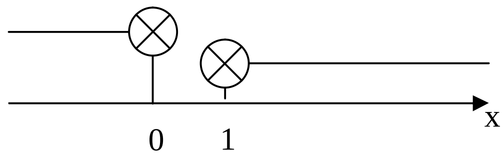
$$S_1: \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \geq 2x-1 \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} x < 1 \\ -x+1 \geq 2x-1 \end{cases}$$

e la soluzione finale si ottiene unendo le soluzioni dei due sistemi

$$S = S_1 \cup S_2$$

Risolviamo S_1

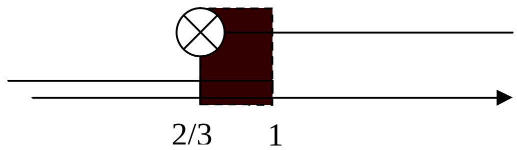
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \geq 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



La soluzione del sistema S_1 è $\varnothing$ perché non ci sono soluzioni in comune.

Risolviamo S_2

$$\begin{cases} x < 1 \\ -x+1 \geq 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -x-2x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -3x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



La soluzione del sistema S_2 è $\left[\frac{2}{3};1\right[$.

Quindi la soluzione finale: $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow \forall x \in \left[\frac{2}{3};1\right[$

Nel caso in cui i valori assoluti sono più di uno, il ragionamento non cambia. Ma vediamo come procedere.

Esempio *equazione con due valori assoluti:*

$$|x|-|x+2|\geq 0$$

studiamo il primo v.a. $|x|$

quando $x \geq 0$ il valore assoluto vale ***x***

quando $x<0$ il valore assoluto vale ***-x***

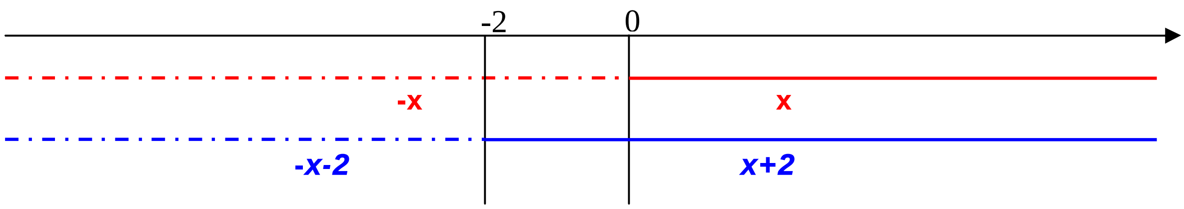
quindi il valore assoluto $|x|$ assume valori diversi nei due intervalli

Studiamo il secondo v.a. $|x+2|$

quando $x+2 \geq 0$ ossia $x \geq -2$ il valore assoluto vale ***x+2***

quando $x+2<0$ ossia $x<-2$ il valore assoluto vale ***-x-2***

Mettendo insieme i due valori assoluti, abbiamo:



dividiamo l'intervallo $(-\infty,+\infty)$ in tre parti:

quando $x<2$ l'equazione assume la forma $-x-(-x-2)=0$

quando $-2 \leq x<0$ l'equazione assume la forma $-x-(x+2)=0$

quando $x \geq 0$ l'equazione assume la forma $x-(x+2)=0$

perciò dobbiamo studiare tre sistemi

$$\begin{cases} x<2 \\ -x-(-x-2)\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\leq x<0 \\ -x-(x+2)\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 0 \\ x-(x+2)\geq 0 \end{cases}$$

La soluzione finale si ricaverà unendo le soluzioni dei tre sistemi

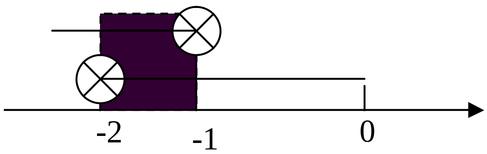
$$S=S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_1 :

$$\begin{cases} x<2 \\ -x+x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ +2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_1 : \forall x \in \mathbb{R}$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_2 :

$$\begin{cases} -2\leq x<0 \\ -x-\left(x+2\right)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq x<0 \\ -x-x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq x<0 \\ -2x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq x<0 \\ x\leq -1 \end{cases}$$



$$S_2 : \quad \forall x \in \left[-2;-1\right]$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene la soluzione S_3 :

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x-(x+2)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x-x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ -2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_3 : \varnothing$$

Quindi la soluzione finale: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

Risolviamo un altro esercizio con più valori assoluti:

Supponiamo di voler risolvere la seguente disequazione con tre valori assoluti:
$\left|x^2-5x+6\right| \le \left|x-3\right| + \left|x\right|$

Esaminiamo il **primo** valore assoluto $\left|x^2-5x+6\right|$

$$\left|x^2-5x+6\right| = \begin{cases} se\ x^2-5x+6 \ge 0 \text{ il v.a. diventa } \quad x^2-5x+6 \\ se\ x^2-5x+6 < 0 \text{ il v.a. diventa } \ -x^2+5x-6 \end{cases}$$

risolvendo l'equazione $x^2-5x+6=0$ si ottengono le due soluzioni $x_1=2$ e $x_2=3$. Quindi:

$$\left|x^2-5x+6\right| = \begin{cases} se\ x \le 2 \vee x \ge 3 \text{ il v.a. diventa } \quad x^2-5x+6 \\ se\ 2 < x < 3 \text{ il v.a. diventa } \quad -x^2+5x-6 \end{cases}$$

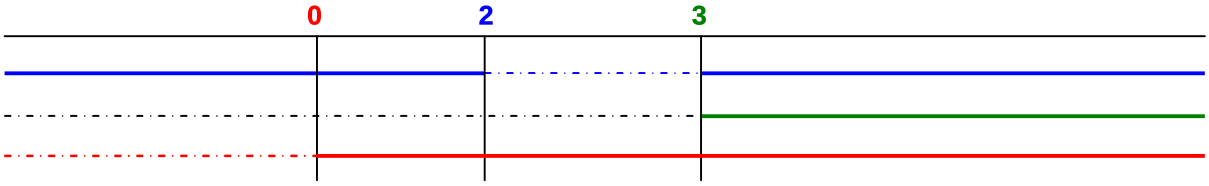
Esaminiamo il **secondo** valore assoluto $\left|x-3\right|$

$$\left|x-3\right| = \begin{cases} se\ x \ge 3 \text{ il v.a. diventa } \ x-3 \\ se\ x < 3 \text{ il v.a. diventa } \ -x+3 \end{cases}$$

Esaminiamo il **terzo** valore assoluto $\left|x\right|$

$$\left|x\right| = \begin{cases} se\ x \ge 0 \text{ il v.a. diventa } \quad x \\ se\ x < 0 \text{ il v.a. diventa } \ -x \end{cases}$$

Mettendo insieme i tre casi:



L'intervallo $]-\infty,+\infty[$ deve essere suddiviso in quattro intervalli:

1° $]-\infty;0[$ 2° $[0;2]$ 3° $]2;3[$ 4° $[3;+\infty[$

Di conseguenza si hanno 4 sistemi:

$$S_1 \quad \begin{cases} x \le 0 \\ x^2-5x+6 \le -x+3-x \end{cases}$$

$$S_2 \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2-5x+6 \le -x+3+x \end{cases}$$

$$S_3 \quad \begin{cases} 2 < x < 3 \\ -x^2+5x-6 \le -x+3+x \end{cases}$$

$$S_4 \quad \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2-5x+6 \le x-3+x \end{cases}$$

dai quali si hanno le seguenti soluzioni:

$$S_1 \Rightarrow \textit{nessuna soluzione } \varnothing$$

$$S_2 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{13}}{2} \le x \le 2$$

$$S_3 \Rightarrow 2 < x < 3$$

$$S_3 \Rightarrow 3 \le x \le \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

se uniamo le soluzioni ottenute determiniamo la soluzione della disequazione:

$$S = \quad \frac{5-\sqrt{13}}{2} \le x \le \frac{7+\sqrt{13}}{2}$$