3D libro

Ilaria Fragni

Percorso Matematica

2

EDIZIONE RIFORMA

con CD-Rom

CEDAM scuola

Ilaria **Fragni**

Percorso Matematica

2

EDIZIONE RIFORMA

CEDAM scuola

CEDAM scuola
internet: www.cedamscuola.it
e-mail: info@cedamscuola.it

La Casa Editrice è certificata da
CISQCERT
In conformità alla norma UNI EN ISO 9001:2008
per l'attività di «Progettazione e realizzazione
di prodotti per l'editoria scolastica»
(certificato n. 02.565)

Redattore responsabile:	Stefano Ganci
Tecnico responsabile:	Gianluigi Ronchetti
Redazione:	Nicola Frau; Edistudio (Milano)
Progetto grafico:	Studio Talarico
Copertina:	Simona Corniola
Impaginazione e prestampa:	Monotipia Olivieri (Milano)
Art Director:	Nadia Maestri

I contenuti della sezione Informath *sono a cura del professor Domenico Ciceri.*

Si ringrazia la professoressa Daniela Mattei per la consulenza prestata nella realizzazione dell'opera.

1ª edizione: febbraio 2011
Printed in Italy

Eventuali segnalazioni di errori, refusi, richieste di chiarimento/funzionamento dei supporti multimediali o spiegazioni sulle scelte operate dagli autori e dalla Casa Editrice possono essere inviate all'indirizzo di posta elettronica *deagostiniscuola@deagostiniscuola.it*.

Stampa: A.G.F. Italia - Peschiera Borromeo (Mi)

Ristampa	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	10 11
Anno	2011	2012	2013	2014	2015	2016

Indice

Unità 5

RADICALI 185

Unità 6

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO 255

Unità 7

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO 307

IL CD-ROM ALLEGATO AL VOLUME

Esercizi interattivi per l'autovalutazione
Timeout Recupero, esercizi svolti e guidati pensati per chi non riesce a superare i punti critici della teoria
English for Math, glossario bilingue italiano-inglese dei termini chiave e delle principali locuzioni utilizzate in Matematica

zonaMatematica

ZONA MATEMATICA è un portale dedicato all'insegnamento e apprendimento della matematica, a cui si può accedere dalla home page del sito **www.scuola.com**, sia direttamente sia dalla scheda dedicata a questo corso (digitandone il titolo o il codice ISBN).

Dopo l'autenticazione è possibile accedere al software **eTutor**, progettato per la verifica e la valutazione dell'apprendimento sia in **modalità docente** sia in **modalità studente**.

Modalità docente

Il Docente, in questa sezione del sito, ha a disposizione un ricco data base di esercizi e un software (**eTutor**) di facile utilizzo per la verifica e la valutazione dell'apprendimento degli studenti e che gli consente di:

- modificare e creare verifiche per la classe, modulari o di fine periodo
- somministrarle alla classe, sia via web sia su formato Word stampabile
- correggere automaticamente le verifiche stesse
- monitorare lo stato di esecuzione
- scegliere e impostare i parametri di valutazione (sintetici o analitici)
- fare un registro della classe.

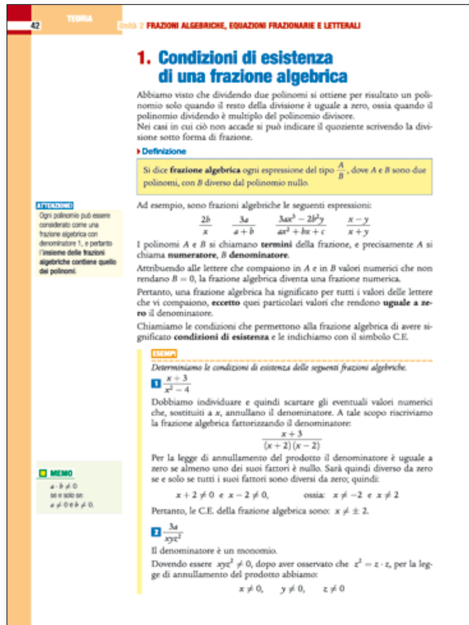
Modalità studente

Lo studente ha a disposizione un ambiente dove:

- svolgere le verifiche personalizzate assegnategli dal docente (attraverso un codice)
- svolgere autonomamente esercizi per il recupero e il potenziamento con autocorrezione

Struttura delle unità didattiche

L'esposizione della **TEORIA** è semplice e lineare e si avvale di numerosi accorgimenti per facilitare lo studio. **Definizioni** e **regole** sono evidenziate, per rendere agevole l'individuazione e la memorizzazione. Gli errori più comuni e i passaggi concettuali più complessi vengono resi espliciti attraverso numerosi **richiami a margine**. Ogni concetto teorico è accompagnato da **esempi** che ne chiariscono l'applicazione.



42 TEORIA Unità 2 FRAZIONI ALGEBRICHE, EQUAZIONI FRAZIONARIE E LETTERALI

1. Condizioni di esistenza di una frazione algebrica

Abbiamo visto che dividendo due polinomi si ottiene per risultato un polinomio solo quando il resto della divisione è uguale a zero, ossia quando il polinomio dividendo è multiplo del polinomio divisore.
Nei casi in cui ciò non accade si può indicare il quoziente scrivendo la divisione sotto forma di frazione.

Definizione

Si dice **frazione algebrica** ogni espressione del tipo $\frac{A}{B}$, dove A e B sono due polinomi, con B diverso dal polinomio nullo.

ATTENZIONE!
Ogni polinomio può essere considerato come una frazione algebrica con denominatore 1, e pertanto l'**insieme delle frazioni algebriche contiene quello dei polinomi**.

Ad esempio, sono frazioni algebriche le seguenti espressioni:

$$\frac{2b}{x} \qquad \frac{3a}{a+b} \qquad \frac{3ax^3-2b^2y}{ax^2+bx+c} \qquad \frac{x-y}{x+y}$$

I polinomi A e B si chiamano **termini** della frazione, e precisamente A si chiama **numeratore**, B **denominatore**.

Attribuendo alle lettere che compaiono in A e in B valori numerici che non rendano $B = 0$, la frazione algebrica diventa una frazione numerica.

Pertanto, una frazione algebrica ha significato per tutti i valori delle lettere che vi compaiono, **eccetto** quei particolari valori che rendono **uguale a zero** il denominatore.

Chiamiamo le condizioni che permettono alla frazione algebrica di avere significato **condizioni di esistenza** e le indichiamo con il simbolo C.E.

ESEMPI

Determiniamo le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

1 $\frac{x+3}{x^2-4}$

Dobbiamo individuare e quindi scartare gli eventuali valori numerici che, sostituiti a x, annullano il denominatore. A tale scopo riscriviamo la frazione algebrica fattorizzando il denominatore:

$$\frac{x+3}{(x+2)(x-2)}$$

Per la legge di annullamento del prodotto il denominatore è uguale a zero se almeno uno dei suoi fattori è nullo. Sarà quindi diverso da zero se e solo se tutti i suoi fattori sono diversi da zero; quindi:

$$x+2 \neq 0 \text{ e } x-2 \neq 0, \qquad \text{ossia: } x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Pertanto, le C.E. della frazione algebrica sono: $x \neq \pm 2$.

MEMO
$a \cdot b \neq 0$
se e solo se:
$a \neq 0$ e $b \neq 0$.

2 $\frac{3a}{xyz^2}$

Il denominatore è un monomio.
Dovendo essere $xyz^2 \neq 0$, dopo aver osservato che $z^2 = z \cdot z$, per la legge di annullamento del prodotto abbiamo:

$$x \neq 0, \qquad y \neq 0, \qquad z \neq 0$$

Le rubriche **Memo** a margine del testo puntualizzano in sintesi i concetti teorici. Le schede **Focus** e i box **Sapevi che?** offrono spunti di approfondimento e presentano curiosità legate alla storia della matematica.

S.O.S. Sintesi

Al termine della parte teorica la sezione **S.O.S. Sintesi**, disposta graficamente su due colonne, consente allo studente di ripassare tutti i concetti e le formule incontrati, affiancati nella colonna di destra dai rispettivi esempi numerici.

START

GO!

Gli **ESERCIZI**, differenziati per tipologia e grado di difficoltà, sono preceduti dalla sezione **Start**, per ripassare i concetti fondamentali, e si sviluppano nella sezione **Go!**, che conduce gradualmente lo studente alla risoluzione autonoma degli esercizi proposti attraverso **Esercizi svolti** ed **Esercizi guidati**.
Test e **Verifiche sommative** permettono allo studente di mettere alla prova la propria preparazione.

EXTRAMATH

Le schede **Extramath** contengono esercizi per il potenziamento.

TIME OUT RECUPERO

Le schede **Timeout recupero** presentano esercizi pensati per chi ha più difficoltà a superare i punti critici della teoria. La serie completa di esercizi, di cui ogni unità presenta una pagina campione, è contenuta nel CD-ROM allegato al volume.

INFORMATH

La sezione **Informath**, al termine di ciascuna unità, fornisce un'ampia e dettagliata conoscenza sull'utilizzo del software Derive.

Nel sito **www.scuola.com** sono disponibili risorse didattiche aggiuntive nell'area contrassegnata dal simbolo

Unità 1

Scomposizione di un polinomio in fattori

Prerequisiti

- Saper scomporre un numero in fattori primi.
- Conoscere le proprietà delle operazioni (in particolare la proprietà inversa della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).
- Conoscere e saper applicare le regole del calcolo letterale (in particolare i prodotti notevoli).
- Conoscere e saper applicare il teorema e la regola di Ruffini.

Obiettivi

- Saper riconoscere un polinomio riducibile.
- Saper individuare e saper applicare tecniche adeguate per scomporre un polinomio in fattori irriducibili.
- Saper determinare M.C.D. e m.c.m. di due o più polinomi.

1. Introduzione

MEMO

La scrittura di un polinomio come prodotto di fattori si dice **scomposizione in fattori** (o **fattorizzazione**) del polinomio.

In Aritmetica abbiamo visto che la scomposizione di un numero naturale in fattori primi è della massima importanza per lo studio successivo delle frazioni. Così pure, in Algebra, è della massima importanza, per le sue applicazioni, la scomposizione dei polinomi in fattori.

Per eseguire le operazioni tra frazioni che abbiano come termini dei polinomi è infatti necessario imparare a **scomporre in fattori** i polinomi, cioè imparare a scriverli, quando è possibile, come prodotto di altri polinomi (ciascuno di grado inferiore a quello del polinomio di potenza).

Definizione

Se un polinomio si può scomporre in fattori si dice **riducibile**; in caso contrario si dice **irriducibile**.

MEMO

Ogni numero naturale maggiore di 1 o è primo o può essere scritto in modo unico come prodotto di fattori primi. Analogamente: ogni polinomio o è irriducibile o può essere scritto in modo unico come prodotto di fattori irriducibili.

Ad esempio:

- il polinomio $x^2 - 1$ è *riducibile*, essendo $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;
- il polinomio $x^2 + 1$ è *irriducibile*, perché non può essere trasformato nel prodotto di fattori di primo grado.

Scomporre un polinomio in fattori presenta una certa difficoltà, perché non esiste un metodo generale da seguire.

Esistono, tuttavia, tecniche applicabili a casi particolari che ora esamineremo. Tali procedimenti di scomposizione si basano sulle regole algebriche fin qui acquisite.

2. Scomposizione mediante raccoglimento totale

La proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione afferma che, ad esempio, $m(a + b + c) = ma + mb + mc$.

Se scriviamo tale uguaglianza invertendo i due membri, otteniamo:

$$ma + mb + mc = m(a + b + c)$$

Pertanto, *se tutti i termini di un polinomio contengono un fattore comune*, il polinomio può essere scritto come prodotto del fattore comune per il quoziente che si ottiene dividendo il polinomio dato per tale fattore.

Quando si applica questo procedimento, detto **raccoglimento totale**, si dice che si è **raccolto**, o **messo in evidenza**, il fattore comune. Questo fattore è, di solito, il M.C.D. fra i termini del polinomio.

ATTENZIONE!

Se moltiplichi tra loro i fattori in cui hai scomposto il polinomio iniziale, otterrai il polinomio stesso.

ESEMPI

Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi effettuando dei raccoglimenti totali.

1 $a^2x + a^2by + a^2z^2$.

Il fattore comune è a^2, quindi:

$$a^2x + a^2by + a^2z^2 = a^2(x + by + z^2)$$

2 $3x^2 + 6xy - 12x^3 + 3x$.
Possiamo scrivere il polinomio nel modo seguente:

$$3x \cdot x + 3x \cdot 2y - 3x \cdot 4x^2 + 3x \cdot 1$$

Il fattore comune è $3x$, quindi:

$$3x^2 + 6xy - 12x^3 + 3x = 3x(x + 2y - 4x^2 + 1)$$

3 $7(x + y) - a(x + y)$
I due addendi hanno come fattore comune $(x + y)$, quindi:

$$7(x + y) - a(x + y) = (x + y)(7 - a)$$

4 $(a - b)x + (b - a)y$
Mettendo in evidenza il segno $-$ nel secondo addendo ed effettuando successivamente un raccoglimento totale, otteniamo:

$$(a - b)x + (b - a)y = (a - b)x - (a - b)y = (a - b)(x - y)$$

ATTENZIONE!
Occorre fare molta attenzione a non commettere il grave errore di tralasciare il quoto parziale 1 nella scomposizione in fattori. Infatti, *se si raccoglie* un fattore in una somma, l'espressione in parentesi deve contenere lo stesso numero di termini della somma iniziale.

ATTENZIONE!
$(b - a) = -(a - b)$
In generale, quando si raccoglie il segno $-$ tra due o più termini, si scrivono tali termini tra parentesi con i segni cambiati.

3. Scomposizione mediante raccoglimento parziale

Consideriamo il polinomio $ax + bx + ay + by$.
Osserviamo che non esiste alcun fattore (diverso da 1) comune a tutti i termini del polinomio, quindi non è possibile eseguire un raccoglimento totale.
Tuttavia, osservando che i primi due termini hanno in comune il fattore x e gli ultimi due il fattore y, possiamo eseguire un raccoglimento tra i primi due termini e un raccoglimento tra il terzo e il quarto:

$$(ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b)$$

I due addendi dell'espressione ottenuta hanno in comune il fattore $(a + b)$, che può pertanto essere raccolto:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Questo metodo di scomposizione è detto **raccoglimento parziale**.

ATTENZIONE!
Il raccoglimento parziale è utile solo se consente, alla fine, un raccoglimento totale che fattorizzi il polinomio.

ESEMPI

Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi effettuando dei raccoglimenti parziali.

1 $4xb - ay - 4yb + ax$
Abbiamo:

fattore comune: $4b$

$$4xb - ay - 4yb + ax = 4b(x - y) + a(x - y) = (x - y)(4b + a)$$

fattore comune: a fattore comune $x - y$

ATTENZIONE!
Avremmo potuto scomporre anche raccogliendo in quest'altro modo:
$x(4b + a) - y(4b + a) =$
$= (4b + a)(x - y)$

2 $3ax - 9ay - x^2 + 3xy$
Raccogliendo $3a$ tra i primi due termini e $-x$ tra gli altri due, abbiamo:

$$3ax - 9ay - x^2 + 3xy = 3a(x - 3y) - x(x - 3y)$$

Raccogliendo successivamente il fattore $(x - 3y)$, otteniamo:

$$3ax - 9ay - x^2 + 3xy = (x - 3y)(3a - x)$$

3 $3bx + by - y - 3x =$ fattori comuni: b tra i primi due termini e -1 tra gli ultimi due
$= b(3x + y) - 1(3x + y) =$ fattore comune: $(3x + y)$
$= (3x + y)(b - 1)$

4. Scomposizione mediante prodotti notevoli

Questo metodo consiste nel riconoscere se il polinomio da scomporre sia lo sviluppo di un prodotto notevole.

Differenza di due quadrati

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

ATTENZIONE!
Le basi A e B sono monomi o, eventualmente, polinomi.

ATTENZIONE!
$9x^2 - 4y^2 =$
$= (-3x - 2y)(-3x + 2y)$
In tutti gli esempi successivi considereremo sempre positivi i coefficienti delle basi di A^2 e di B^2.

ATTENZIONE!
- $A^2 - B^2 \neq (A - B)^2$
- $A^2 + B^2 \neq (A + B)(A - B)$

ESEMPI

1 $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$

$$A^2 \quad - \quad B^2 \quad = \quad (A \; + B) \cdot (A - B)$$

2 $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

3 $\dfrac{1}{9}x^4 - 16y^2 = \left(\dfrac{1}{3}x^2\right)^2 - (4y)^2 = \left(\dfrac{1}{3}x^2 + 4y\right)\left(\dfrac{1}{3}x^2 - 4y\right)$

4 $(a - 2b)^2 - 9b^2$

Si tratta di una differenza di due quadrati le cui basi sono $(a - 2b)$ e $3b$. Otteniamo:

$$(a - 2b)^2 - 9b^2 = (a - 2b + 3b) \cdot (a - 2b - 3b) = (a + b)(a - 5b)$$

$$A^2 \quad - \quad B^2 \quad = \quad (A \quad + \quad B) \quad \cdot \quad (A \quad - \quad B)$$

Trinomio scomponibile nel quadrato di un binomio

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

ESEMPI

1 $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x + 2y)^2$

$$A^2 \quad + \quad 2A \cdot B \quad + \quad B^2 \quad = (A \; + \; B)^2$$

ATTENZIONE!
$A^2 - 2AB + B^2 =$
$= (A - B)^2 = (B - A)^2$

2 $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-3y) + (-3y)^2 = (2x - 3y)^2$

oppure:

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (-2x)^2 + 2(-2x)(3y) + (3y)^2 = (-2x + 3y)^2$

Polinomio scomponibile nel quadrato di un trinomio

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2$$

ESEMPI

1 $a^2 + 1 + b^2 + 2a + 2ab + 2b = (a + 1 + b)^2$

ATTENZIONE!
Il polinomio dell'esempio 2 è fattorizzabile anche nel modo seguente:
$(-3a^2 + 2b^2 - 1)^2$

2 $9a^4 + 4b^4 + 1 - 12a^2b^2 + 6a^2 - 4b^2 =$
$= (3a^2)^2 + (-2b^2)^2 + 1^2 + 2(3a^2)(-2b^2) + 2(3a^2) \cdot 1 + 2(-2b^2) \cdot 1 =$
$= (3a^2 - 2b^2 + 1)^2$

Quadrinomio scomponibile nel cubo di un binomio

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori il polinomio $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

Il primo e l'ultimo termine sono, rispettivamente, il cubo di $2x$ e il cubo di 1, mentre gli altri due termini sono il triplo prodotto del quadrato di $2x$ per 1 e il triplo prodotto di $2x$ per il quadrato di 1, cioè:

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3(2x) \cdot 1^2 + 1^3 = (2x+1)^3$$

$$A^3 \quad + \quad 3A^2 \cdot B + \quad 3A \cdot B^2 + B^3 = (A+B)^3$$

ATTENZIONE!

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$
$= (2x-1)^3$

5. Scomposizione della somma e della differenza di due cubi

Ricordiamo ora due uguaglianze notevoli ricavate nell'unità 6 del volume 1.

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \qquad A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

ATTENZIONE!

- I fattori $(A^2 - AB + B^2)$ e $(A^2 + AB + B^2)$ sono detti *falsi quadrati* perché assomigliano (ma non lo sono!) allo sviluppo dei quadrati dei binomi $(A-B)^2$ e $(A+B)^2$.
  In tali trinomi compare infatti il prodotto (e non il doppio prodotto!) delle basi A e B.
  I falsi quadrati sono trinomi di secondo grado irriducibili (avrai gli «strumenti» per dimostrarlo più avanti).
- $A^3 + B^3 \neq (A+B)^3$
  $A^3 - B^3 \neq (A-B)^3$

ESEMPI

1 $a^3 + 27 = (a+3)(a^2 - 3a + 9)$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

2 $27a^6 - \dfrac{1}{8} = \left(3a^2 - \dfrac{1}{2}\right)\left(9a^4 + \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{1}{4}\right)$

3 $(2a+b)^3 + 64a^3 = (2a+b)^3 + (4a)^3 =$
$= (2a+b+4a)[(2a+b)^2 - 4a(2a+b) + (4a)^2] =$
$= (6a+b)(4a^2 + 4ab + b^2 - 8a^2 - 4ab + 16a^2) = (6a+b)(12a^2 + b^2)$

4 $a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$
$= (a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
oppure:
$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$
$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

FOCUS

L'esempio 4 suggerisce la seguente considerazione:

- $a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2$
  irriducibile (se considerato come somma di due quadrati)
- $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$
  riducibile (se considerato come somma di due cubi)

6. Scomposizione di trinomi notevoli di secondo grado

Un trinomio del tipo $x^2 + (a+b)x + ab$, cioè un trinomio di secondo grado in una variabile, in cui il primo coefficiente è uguale a 1 e il secondo coefficiente è la *somma* di due numeri il cui *prodotto* è uguale al termine noto, si dice **trinomio notevole**.

Un trinomio di questo tipo si può scomporre nel modo seguente:

$$x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)(x+b)$$

Vale, quindi, la seguente regola generale.

Regola

Dato un trinomio di secondo grado $x^2 + sx + p$, se esistono due numeri a e b tali che $a + b = s$ e $a \cdot b = p$, allora vale la seguente uguaglianza:

$$x^2 + sx + p = (x+a)(x+b)$$

ATTENZIONE!

Applicheremo l'uguaglianza:
$x^2 + (a+b)x + ab =$
$= (x+a)(x+b)$
solo nel caso in cui a e b siano numeri interi relativi.

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori il polinomio $x^2 - 5x + 6$.

Per fattorizzarlo, procediamo nel modo seguente.

1. Cerchiamo due numeri il cui prodotto sia $+6$ e la cui somma sia -5.

Essendo il prodotto positivo, i due numeri che stiamo cercando devono essere concordi (entrambi positivi o entrambi negativi), ma, poiché la loro somma è negativa, i due numeri devono essere concordi negativi.

2. Valutiamo le alternative possibili.

I numeri concordi negativi che, moltiplicati fra loro, danno $+6$ sono:

- -1 e -6, e la loro somma è -7;
- -2 e -3, e la loro somma è -5.

Dunque -2 e -3 sono i numeri che stiamo cercando.

3. Scriviamo il trinomio come prodotto di fattori.

Il trinomio corrisponde a:

$$(x + \text{primo numero})(x + \text{secondo numero})$$

cioè:

$$(x-2)(x-3).$$

Infatti, si ha:

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6.$$

Un trinomio di secondo grado che non è notevole poiché il coefficiente del termine di secondo grado è diverso da 1, è riducibile nel caso in cui esistano due numeri la cui somma s sia uguale al coefficiente del termine di primo grado e il cui prodotto p sia uguale al prodotto del coefficiente del termine di secondo grado per il termine noto.

La scomposizione di un trinomio di questo tipo si effettua sdoppiando il termine di primo grado ed eseguendo opportuni raccoglimenti.

Illustriamo il procedimento con un esempio.

ESEMPIO

Scomponiamo il trinomio $2x^2+5x+3$.
Cerchiamo due numeri il cui prodotto sia $p=2\cdot3=+6$ e la cui somma sia $s=+5$.
Osserviamo che, poiché il prodotto è positivo, i due numeri devono essere concordi, e, poiché anche la somma è positiva, i due numeri devono essere concordi positivi.
I numeri concordi positivi cercati sono 2 e 3.
Riscriviamo allora il trinomio nella forma

$$2x^2+\underbrace{2x+3x}_{5x}+3$$

Scomponiamo quindi il polinomio ottenuto mediante opportuni raccoglimenti.
Raccogliendo $2x$ fra i primi due termini e 3 fra gli ultimi due, otteniamo:

$$2x(x+1)+3(x+1)=(x+1)(2x+3)$$

ATTENZIONE!
Anche $1\cdot6=6$,
ma $1+6=7\neq5$

7. Scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

Alcuni polinomi si possono scomporre in fattori applicando il teorema di Ruffini.
Sappiamo, infatti, che se un polinomio $P(x)$ si annulla quando alla variabile x si sostituisce un numero a, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)$.
Determinando, quindi, con la regola di Ruffini, il quoziente $Q(x)$ della divisione $P(x):(x-a)$, poiché il resto è zero, possiamo scrivere:

$$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$$

Abbiamo, cioè, scomposto in fattori il polinomio $P(x)$.
Per poter applicare questo procedimento di scomposizione è tuttavia necessario individuare gli eventuali zeri di un polinomio.
A tale scopo, enunciamo la seguente regola.

MEMO
Sia $P(x)$ un polinomio. Se $P(a)=0$ si dice che a è uno **zero** di $P(x)$.

Regola

Gli eventuali zeri di un polinomio a coefficienti interi vanno cercati tra le frazioni $\pm\dfrac{p}{q}$, dove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

ATTENZIONE!
Se il coefficiente del termine di grado massimo è 1, gli eventuali zeri (interi, in questo caso) del polinomio vanno cercati tra i divisori del termine noto.

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori il polinomio $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

Poiché il coefficiente del termine di grado massimo è 1, i possibili zeri di $P(x)$ vanno cercati tra i divisori interi del termine noto $+6$, ossia ±1, ±2, ±3, ±6.

Verifichiamo se questi valori annullano $P(x)$:

$P(1)=1-2-5+6 \quad =0 \quad \rightarrow \quad 1$ è uno zero di $P(x)$, quindi $P(x)$ è divisibile per $(x-1)$

ATTENZIONE!
Come puoi osservare dall'esempio, non tutti i divisori del termine noto sono zeri del polinomio.

$P(-1) = -1 - 2 + 5 + 6 \quad \neq 0$

$P(2) = 8 - 8 - 10 + 6 \qquad \neq 0$

$P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0 \quad \to -2$ è uno zero di $P(x)$, quindi $P(x)$ è divisibile per $(x + 2)$

Si potrebbe continuare la ricerca di un eventuale terzo zero intero ma, applicando la regola di Ruffini, lo si trova automaticamente. Pertanto, procediamo con la divisione applicando la regola di Ruffini due volte, una di seguito all'altra:

ATTENZIONE!
Avremmo potuto scomporre il trinomio $x^2 - x - 6$ applicando la regola enunciata per il trinomio notevole di secondo grado.

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0
−2		−2	+6	
	1	−3	0	

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ viene diviso per $(x - 1)$, il quoziente è:

$x^2 - x - 6$

che poi viene diviso per $(x + 2)$ e il quoziente è: $x - 3$

La fattorizzazione del polinomio iniziale è: $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

8. M.C.D. e m.c.m. di due o più polinomi

Dati due polinomi, supponiamo di essere riusciti a scomporli in fattori **irriducibili**: in questo caso è possibile trovare il M.C.D. e il m.c.m. dei polinomi dati con le seguenti regole.

Regola 1

Il M.C.D. di due o più polinomi scomposti in fattori **irriducibili** è dato dal prodotto di tutti e soli i fattori **comuni** ai polinomi dati, ciascuno preso una sola volta e con il **minimo** esponente.

ATTENZIONE!
Se le scomposizioni dei polinomi dati non contengono fattori irriducibili comuni, si ha M.C.D. = 1.

Regola 2

Il m.c.m. di due o più polinomi scomposti in fattori **irriducibili** è dato dal prodotto di tutti i fattori, **comuni** e **non comuni** ai polinomi dati, ciascuno preso una sola volta e con il **massimo** esponente.

ESEMPI

Determiniamo il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti polinomi.

MEMO
Le definizioni di M.C.D. e m.c.m. fra polinomi sono analoghe a quelle enunciate per i monomi.

1 $2a - 2 \qquad 8a^2 - 8 \qquad 6a^2 - 12a + 6$

Scomponiamo i polinomi in fattori:

$$2a - 2 = 2(a - 1) \qquad 8a^2 - 8 = 8(a^2 - 1) = 8(a + 1)(a - 1)$$

$$6a^2 - 12a + 6 = 6(a^2 - 2a + 1) = 6(a - 1)^2$$

Applicando le regole enunciate concludiamo che:

$$\text{M.C.D.} = 2(a - 1) \quad \text{m.c.m.} = 24(a - 1)^2(a + 1)$$

2 $x^2 - 6x + 5 \qquad x^2 - 7x + 10 \quad x^2 - 2x + 1$

Scomponendo i polinomi in fattori, otteniamo:

$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$

$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Il M.C.D. è 1, mentre il m.c.m. è $(x - 1)^2(x - 2)(x - 5)$.

S.O.S. Sintesi

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI	**Scomporre in fattori** un polinomio significa trasformarlo, quando è possibile, nel prodotto di due o più polinomi di grado minore (tra i fattori può esservi anche un monomio). Un polinomio si dice: • **riducibile**, quando è scomponibile in fattori; • **irriducibile**, in caso contrario.	• Il polinomio (x^2-4) è riducibile, essendo: $(x^2-4)=(x+2)\cdot(x-2)$ • Il polinomio (x^2+4) è irriducibile
SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RACCOGLIMENTO TOTALE	Se tutti i termini di un polinomio contengono un fattore comune (in generale il M.C.D. dei termini del polinomio stesso), il polinomio può essere scritto come prodotto di tale fattore comune per il quoziente che si ottiene dividendo il polinomio dato per il fattore stesso.	• Scomponiamo il polinomio $3x^6-12x^4+9x^3$. Poiché il M.C.D. dei termini del polinomio è $3x^3$, si ha: $3x^6-12x^4+9x^3=3x^3\cdot(x^3-4x+3)$ • Scomponiamo il polinomio $2a(a-b)+(a-b)^2$. In questo caso il fattore comune è $(a-b)$. Quindi: $2a(a-b)+(a-b)^2=(a-b)\cdot[2a+(a-b)]=$ $=(a-b)(3a-b)$
SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RACCOGLIMENTO PARZIALE	Si effettuano dei raccoglimenti tra gruppi di termini del polinomio dato, in modo che, successivamente, sia possibile effettuare un raccoglimento totale.	• Scomponiamo il polinomio $ab-ac+2b-2c$: $\underbrace{ab-ac}_{\text{mettiamo in evidenza il fattore comune } a}+\underbrace{2b-2c}_{\text{mettiamo in evidenza il fattore comune } 2}=$ $=\underbrace{a\cdot(b-c)+2\cdot(b-c)}_{\text{mettiamo in evidenza il fattore comune } (b-c)}=(b-c)\cdot(a+2)$
SCOMPOSIZIONE MEDIANTE PRODOTTI NOTEVOLI — **DIFFERENZA DI DUE QUADRATI**	$A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$	• Scomponiamo il binomio $9x^4-16y^2$: $9x^4-16y^2=(3x^2)^2-(4y)^2=(3x^2+4y)\cdot(3x^2-4y)$
TRINOMIO SCOMPONIBILE NEL QUADRATO DI UN BINOMIO	$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$ $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$	• Scomponiamo il trinomio $9x^2+12xy+4y^2$: $\underbrace{9x^2}_{(3x)^2}+\underbrace{12xy}_{2\cdot(3x)\cdot 2y}+\underbrace{4y^2}_{(2y)^2}=(3x+2y)^2$ • $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)^2$
POLINOMIO SCOMPONIBILE NEL QUADRATO DI UN TRINOMIO	$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=$ $=(A+B+C)^2$	• Scomponiamo il polinomio $x^2+4y^2+9a^2+4xy+6ax+12ay$: $\underbrace{x^2}_{x^2}+\underbrace{4y^2}_{(2y)^2}+\underbrace{9a^2}_{(3a)^2}+\underbrace{4xy}_{2\cdot x(2y)}+\underbrace{6ax}_{2\cdot x(3a)}+\underbrace{12ay}_{2(2y)(3a)}=$ $=(x+2y+3a)^2$

SCOMPOSIZIONE MEDIANTE PRODOTTI NOTEVOLI QUADRINOMIO SCOMPONIBILE NEL CUBO DI UN BINOMIO	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$	• Scomponiamo il polinomio $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$: $\underbrace{x^3}_{x^3}+\underbrace{6x^2y}_{3x^2(2y)}+\underbrace{12xy^2}_{3x(2y)^2}+\underbrace{8y^3}_{(2y)^3}=(x+2y)^3$
SCOMPOSIZIONE DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA DI DUE CUBI	$A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$ $A^3-B^3=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$	• Scomponiamo il binomio $27x^3+8y^3$: $\underbrace{27x^3}_{(3x)^3}+\underbrace{8y^3}_{(2y)^3}=(3x+2y)\cdot(9x^2-6xy+4y^2)$ • $27x^3-8y^3=(3x-2y)\cdot(9x^2+6xy+4y^2)$
SCOMPOSIZIONE DI TRINOMI NOTEVOLI DI SECONDO GRADO	• $x^2+(a+b)x+a\cdot b=(x+a)(x+b)$ • Se il trinomio da scomporre è del tipo ax^2+bx+c, con $a\neq 1$, occorre determinare due numeri tali che, detta s la loro somma e p il loro prodotto, sia: $s=b$ e $p=a\cdot c$ e procedere come nell'esempio a fianco.	• Scomponiamo il trinomio $x^2+8x+15$: $x^2+\underbrace{8}_{(3+5)}x+\underbrace{15}_{(3\cdot 5)}=(x+3)(x+5)$ • Scomponiamo il trinomio $2x^2+5x-3$: $\underbrace{2x^2+5x-3}$ $\left.\begin{array}{l}p=-6\\ s=5\end{array}\right\rangle \to$ i numeri cercati sono $+6$ e -1 $=2x^2+6x-x-3=2x(x+3)-1(x+3)=$ $=(x+3)(2x-1)$
SCOMPOSIZIONE MEDIANTE IL TEOREMA E LA REGOLA DI RUFFINI	Per scomporre un polinomio $P(x)$ applicando il teorema e la regola di Ruffini: • si cerca uno zero c del polinomio, ossia un numero c tale che $P(c)=0$; • si determina, applicando la regola di Ruffini, il quoziente $Q(x)$ della divisione tra $P(x)$ e il binomio $(x-c)$. La scomposizione in fattori di $P(x)$ sarà: $P(x)=(x-c)\cdot Q(x)$	• Scomponiamo il polinomio x^3+2x^2-3: Posto $P(x)=x^3+2x^2-3$, poiché $P(1)=0$, si ha: $\begin{array}{c\|ccc\|c} & 1 & 2 & 0 & -3\\ 1 & & 1 & 3 & 3\\ \hline & 1 & 3 & 3 & 0\end{array} \to Q(x)=x^2+3x+3$ Quindi la scomposizione del polinomio iniziale è: $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$
MASSIMO COMUN DIVISORE E MINIMO COMUNE MULTIPLO DI DUE O PIÙ POLINOMI	• Il **M.C.D.** di due o più polinomi scomposti in fattori irriducibili è dato dal prodotto di tutti e soli i fattori comuni ai polinomi dati, ciascuno preso una sola volta e con il minimo esponente. • Il **m.c.m.** di due o più polinomi scomposti in fattori irriducibili è dato dal prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni ai polinomi dati, ciascuno preso una sola volta e con il massimo esponente.	• Dati i polinomi: $x^3+2x^2 \qquad x^2-4 \qquad x^2+4x+4$ poiché: $x^3+2x^2=x^2(x+2)$ $x^2-4=(x+2)(x-2)$ $x^2+4x+4=(x+2)^2$ si ha: M.C.D. $=x+2$; m.c.m. $=x^2(x-2)(x+2)^2$

Scomposizione mediante raccoglimento totale

START

1 Scomporre un polinomio in fattori significa trasformarlo nel .... di due o più polinomi di grado ....
Quando questo è possibile, il polinomio si dice ....; in caso contrario si dice ....

2 Il fattore che si mette in evidenza quando si effettua un raccoglimento a fattor comune è, di solito, il .... dei termini del polinomio da scomporre.
Ad esempio, per scomporre il polinomio $2a^2x^3y - 4ax^3y^3 - 8a^4x^2y^4$ mediante raccoglimento totale, mettiamo in evidenza il fattore ....

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

3 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimenti totali.

a) $7a^2x^2 - 3a^3x^2 - \frac{1}{2}a^2x$

Il M.C.D. dei termini del polinomio è: a^2x.

Ora, essendo: $7a^2x^2 : a^2x = 7x, \quad -3a^3x^2 : a^2x = -3ax, \quad -\frac{1}{2}a^2x : a^2x = -\frac{1}{2}$

otteniamo: $7a^2x^2 - 3a^3x^2 - \frac{1}{2}a^2x = a^2x\left(7x - 3ax - \frac{1}{2}\right)$.

b) $\frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{4}{15}a^4x^5 - \frac{8}{21}ax^3$

In questo caso il M.C.D. tra i termini del polinomio è: ax^3. Osserviamo, tuttavia, che tra i coefficienti dei termini del polinomio è possibile mettere in evidenza la frazione che ha per:
- numeratore il M.C.D. dei numeratori, ossia 2;
- denominatore il M.C.D. dei denominatori, ossia 3.

Pertanto, abbiamo: $\frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{4}{15}a^4x^5 - \frac{8}{21}ax^3 = \frac{2}{3}ax^3\left(a + \frac{2}{5}a^3x^2 - \frac{4}{7}\right)$.

ESERCIZIO GUIDATO

4 Scomponi in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimenti totali.

a) $-12a^2x^3y^5 - 24ax^4y^3 - 15a^4x^2y^4 = -3ax^{\dots\dots}y^{\dots\dots} \cdot (\dots\dots axy^{\dots\dots} \dots\dots 8x^{\dots\dots} + \dots\dots a^{\dots\dots}y)$

b) $7a^2b^3c - \frac{14}{3}a^5b^2 - 21ac^2 + \frac{14}{5}abc = 7\dots\dots \cdot (ab^{\dots\dots}c - \frac{2}{3}a^{\dots\dots}b^{\dots\dots} - \dots\dots c^{\dots\dots} + \frac{\dots\dots}{5}b\dots\dots)$

Completa.

5 a) $7a^2 + 7b^2 = 7(\dots\dots + \dots\dots)$ $\qquad -3a^2 - 3b^2 = -3(\dots\dots + \dots\dots)$

b) $-2a + 6b = -2(\dots\dots - \dots\dots)$ $\qquad -5x^2y + 25x = -5x(\dots\dots\dots)$

6 a) $2x^3 - 3x^2 + x = x(\dots\dots - \dots\dots + \dots\dots)$ $\qquad x^2y + xy^2 + xy = xy(\dots\dots\dots\dots)$

b) $ab^2 - b^3 - b^2 = -b^2(\dots\dots\dots\dots)$ $\qquad \frac{2}{3}t^3 - \frac{4}{5}t^2 + \frac{6}{7}t = 2t(\dots\dots\dots\dots)$

7 a) $x^4 + x^2 = x^2\ (...)$ $\qquad ab - b^2 = b\ (...)$

b) $2a^2b^5 - 3a^2b^4 + 4a^4b^4 = a^2b^4\ (...)$

8 a) $a^7 - \frac{1}{2}a^8 - \frac{2}{3}a^6 + a^5 = a^5\ (...)$

b) $2x^2y^3 - \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{2}{3}x^3y^3 = x^2y^2\ (...)$

9 $z^5 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{2}{3}z^4 = z^3\ (...)$

Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimenti totali.

10 $45a^2b - 15a^3b^2 - 5a^2 \qquad 2x^3y - 4x^4y - 6x^2y$ $\quad [5a^2(9b - 3ab^2 - 1);\ 2x^2y(x - 2x^2 - 3)]$

11 $x^3 + x \qquad xy - 7y \qquad a - ab \qquad x + 2xy$ $\quad [x(x^2+1);\ y(x-7);\ a(1-b);\ x(1+2y)]$

12 $x^2y - xy \qquad 4xy + 2y \qquad 2x^3 - 4x$ $\quad [xy(x-1);\ 2y(2x+1);\ 2x(x^2-2)]$

13 $4x^5y + 2xy^2 \qquad 3 - 9y^2 \qquad 2x^3y - 2x^5 + 2x^2$ $\quad [2xy(2x^4+y);\ 3(1-3y^2);\ 2x^2(xy - x^3 + 1)]$

14 $-a^2b^2 + 2a^2b^3 + ab^4 \qquad -a^3b + 2a^4b^2 \qquad \frac{a^6b}{3} - 3a^3b^3 + \frac{a^2b^2}{2}$

$\left[ab^2(-a + 2ab + b^2);\ a^3b(-1+2ab);\ a^2b\left(\frac{1}{3}a^4 - 3ab^2 + \frac{1}{2}b\right)\right]$

15 $-\frac{4}{3}a^5 + \frac{8}{5}a^5y^3 + a^4 \qquad \frac{1}{2}x^{10}y^2 - 2x^6y^4 + \frac{1}{6}x^6y^5 \qquad 2a^2bc^3 - 8a^3bc^2 + 4ac^2$

$\left[-a^4\left(\frac{4}{3}a - \frac{8}{5}ay^3 - 1\right);\ -x^6y^2\left(-\frac{1}{2}x^4 + 2y^2 - \frac{1}{6}y^3\right);\ 2ac^2\left(abc - 4a^2b + 2\right)\right]$

16 $3a^2b - ab^2 + abc \qquad 2a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3 \qquad -2ab^3 + 2a^2b - 6a^2b^2$

$[ab(3a - b + c);\ 2ab(a^2 - 2ab + 2b^2);\ 2ab(-b^2 + a - 3ab)]$

17 $7a^5b^4 - 7a^4b^4 + 14a^4b^5 \qquad 12x^2y^4 - 8x^4y^2z + 4x^8y^4z^6$

$[7a^4b^4(a - 1 + 2b);\ 4x^2y^2(3y^2 - 2x^2z + x^6y^2z^6)]$

18 $-4x^4a^2b^6 + 12x^6a^4b^2 - 16x^4a^6b^8 \qquad \frac{2}{3}x^5y - \frac{4}{3}x^3y^4 + \frac{1}{3}x^2y^3$

$\left[-4x^4a^2b^2(b^4 - 3x^2a^2 + 4a^4b^6);\ \frac{1}{3}x^2y(2x^3 - 4xy^3 + y^2)\right]$

19 $4xy^2 + 4x^2y - 4x^2y^2 \qquad 3x^3y + x^2y + xy$ $\quad [4xy(y + x - xy);\ xy(3x^2 + x + 1)]$

20 $3a^3b^4 + 6a^2b^6 - 9a^4b^3 + 12a^3b^2$ $\quad [3a^2b^2(ab^2 + 2b^4 - 3a^2b + 4a)]$

21 $\frac{3}{10}a^3b^2 + \frac{3}{2}ab^4 - \frac{1}{20}a^4b^3 \qquad ax^2 + a^2x - a^3x^2$ $\quad \left[\frac{1}{2}ab^2\left(\frac{3}{5}a^2 + 3b^2 - \frac{1}{10}a^3b\right);\ ax(x + a - a^2x)\right]$

22 $xy + x^2y - 2xy^2 \qquad -\frac{9}{25}a^6b^3c + \frac{27}{5}a^5b^2c^3 - 6a^5b^3c$

$\left[xy(1 + x - 2y);\ a^5b^2c\left(-\frac{9}{25}ab + \frac{27}{5}c^2 - 6b\right)\right]$

23 $12axy + 6ax^2y^2 - 2axy^2 + 4ax^3y^3$ $\qquad \frac{6}{5}a^2b^2 - \frac{3}{5}a^3b^3 - \frac{12}{5}ab^2$

$\left[2axy(6 + 3xy - y + 2x^2y^2);\ \frac{3}{5}ab^2(2a - a^2b - 4)\right]$

24 $3x^2y^4 - 6xy + 9x^2 - 12x^3y^2$ $\qquad \frac{2}{3}xy - \frac{4}{3}x^2y^2 + \frac{8}{27}x^2$

$\left[3x(xy^4 - 2y + 3x - 4x^2y^2);\ \frac{2}{3}x\left(y - 2xy^2 + \frac{4}{9}x\right)\right]$

25 $7ax^2y - 49ax^3y^2 - 28a^3x^2y^3 + 14a^2x^4y^5 - 21ax^5$ $\qquad [7ax^2(y - 7xy^2 - 4a^2y^3 + 2ax^2y^5 - 3x^3)]$

26 $25xy^2 - 5x^3y + 10xy - 5x^3y^2$ $\qquad [5xy(5y - x^2 + 2 - x^2y)]$

27 $\frac{3}{10}a^2b^7c^4 + \frac{2}{5}a^2b^2c^2 - \frac{4}{25}a^3b^6c + \frac{7}{15}ab^2c^3$ $\qquad \left[\frac{1}{5}ab^2c\left(\frac{3}{2}ab^5c^3 + 2ac - \frac{4}{5}a^2b^4 + \frac{7}{3}c^2\right)\right]$

28 $2m^2p^3 - \frac{4}{7}mp^2 - \frac{8}{5}m^3p^5 - mp$ $\qquad \left[mp\left(2mp^2 - \frac{4}{7}p - \frac{8}{5}m^2p^4 - 1\right)\right]$

29 $8a^4x^4 - 12a^5x^3 + 16a^3x^3 - 28ax^2 - 32a^2x$ $\qquad [4ax(2a^3x^3 - 3a^4x^2 + 4a^2x^2 - 7x - 8a)]$

30 $\frac{35}{2}x^8 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{16}$ $\qquad 18a^2x^2 - 12ax + 24x^3$ $\qquad \left[7\left(\frac{5}{2}x^8 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{16}\right);\ 6x(3a^2x - 2a + 4x^2)\right]$

31 $18a^2b^4x^3 - 36a^3b^3x^2 + 27ax^2 - 81bx^4$ $\qquad [9x^2(2a^2b^4x - 4a^3b^3 + 3a - 9bx^2)]$

32 $0,\overline{5}\,a^4 - 0,\overline{7}a^2x + 0,\overline{8}a^3x^2$ $\qquad \left[\frac{1}{9}a^2(5a^2 - 7x + 8ax^2)\right]$

33 $0,2\,b^5x^3 - 0,6b^2x^4 + 0,8bx^6 - 0,1x^7$ $\qquad \left[\frac{1}{10}x^3(2b^5 - 6b^2x + 8bx^3 - x^4)\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

34 Scomponiamo il polinomio $x^2(x - 3y) + 5x(x - 3y)^2 - 6x(x - 3y)$ mettendo in evidenza i fattori comuni.

Osserviamo che i fattori comuni ai termini del polinomio sono: x e $(x - 3y)$. Mettiamo in evidenza tali fattori:

$$x^2(x - 3y) + 5x(x - 3y)^2 - 6x(x - 3y) = x(x - 3y)[x + 5(x - 3y) - 6]$$

Eseguiamo i calcoli dentro la parentesi quadra e riduciamo gli eventuali termini simili:

$$x(x - 3y)[x + 5x - 15y - 6] = x(x - 3y)(6x - 15y - 6)$$

Osserviamo ora che i termini del polinomio $(6x - 15y - 6)$ hanno come fattore comune 3; mettendo in evidenza tale fattore e applicando, poi, la proprietà commutativa della moltiplicazione, otteniamo:

$$x(x - 3y) \cdot 3 \cdot (2x - 5y - 2) = 3x(x - 3y)(2x - 5y - 2)$$

ESERCIZIO GUIDATO

35 Scomponi il seguente polinomio mettendo in evidenza i fattori comuni.

$(x + y)^2 - 3y(x + y) + 4x(x + y) =$

$= (\ldots\ldots + \ldots\ldots)[(x + y) \ldots\ldots 3y + \ldots\ldots] = (x + y)(\ldots\ldots + y \ldots\ldots 3y + \ldots\ldots) =$

$= (x + y)(\ldots\ldots x \ldots\ldots 2y)$

Scomponi i seguenti polinomi mettendo in evidenza in ciascuno di essi i fattori comuni.

36 $5x(x-1)-10y(1-x)$ $\quad 2x(x+1)-4(x+1)$ $\quad [5(x-1)(x+2y);\ 2(x+1)(x-2)]$

37 $x(a+b)+y(a+b)$ $\quad a(b+c)-d(b+c)$ $\quad [(x+y)(a+b);\ (a-d)(b+c)]$

38 $(a-b)^3-(a-b)^2$ $\quad 5(x-1)(x+1)-25(x+1)$ $\quad [(a-b)^2(a-b-1);\ 5(x+1)(x-6)]$

39 $(x+y)a^2+(x+y)a+(x+y)$ $\quad (2a-3b)(x-y)+(4a+b)(x-y)$
$[(x+y)(a^2+a+1);\ 2(x-y)(3a-b)]$

40 $2(x+2y)^2-4y(x+2y)$ $\quad 3x(a-1)+6ax(a-1)^2$ $\quad [2x(x+2y);\ 3x(a-1)(2a^2-2a+1)]$

41 $3(2x-1)+a(2x-1)-(2x-1)$ $\quad (2a-3)^3-a(2a-3)^2+3(2a-3)^2$
$[(2x-1)(a+2);\ a(2a-3)^2]$

42 $5(5x+2y)^4+25(5x+2y)^3x$ $\quad ax(x^2+y^2)+ax^2(x+y)$
$[10(5x+2y)^3(5x+y);\ ax(2x^2+xy+y^2)]$

43 $a^3b(3a-b)+ab^2(3a-b)^2$ $\quad [ab(3a-b)(a^2+3ab-b^2)]$

44 $2a(a+b-2c)+3b(a+b-2c)+2c(a+b-2c)$ $\quad [(a+b-2c)(2a+3b+2c)]$

45 $3ab(a+b)(a+1)-9a^2b^2(a+b)(a+1)$ $\quad [3ab(a+b)(a+1)(1-3ab)]$

46 $2a(a+b)^2+2b(a+b)^2$ $\quad [2(a+b)^3]$

47 $2a(a+b)^2-2ab(a+b)$ $\quad [2a^2(a+b)]$

48 $2a(3a+5)+(b-1)(3a+5)+(1-b)(3a+5)$ $\quad [2a(3a+5)]$

49 $2y(2x+3)+(3y-2)(2x+3)-(x-2)(2x+3)+(3x-2y)(2x+3)$ $\quad [(2x+3)(2x+3y)]$

CACCIA ALL'ERRORE

50 Nell'eseguire le seguenti scomposizioni sono stati commessi degli errori. Individuali e correggili.
a) $16a^3-8a^2+2a=2a(8a^2-4a)$
b) $a^4x+a^3x^2+a^2x^3+ax^4=a^4x(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)$
c) $2(a+1)^2+4(a+1)=2(a+1)(a+5)$

TROVA L'INTRUSO

51 In quale dei seguenti trinomi non è possibile eseguire un raccoglimento totale?
a) a^3+3a^2+a $\quad$ b) $2a^3+4a^2+6$ $\quad$ c) a^3+3a^2+1

Scomposizione mediante raccoglimento parziale

START

52 Consideriamo il polinomio $2ax+4ay+3x+6y$.

Poiché il M.C.D. dei suoi termini è uguale a ...., non è possibile effettuare un raccoglimento a .... Osserviamo, tuttavia, che è possibile mettere in evidenza tra i primi due termini il fattore .... e tra il terzo e il quarto termine il fattore ....

Otteniamo in tal modo:

$$2ax+4ay+3x+6y=\ldots\ldots(x+2y)+3(x+2y)$$

I raccoglimenti effettuati sono stati efficaci poiché abbiamo ottenuto un polinomio in cui è possibile mettere in evidenza il fattore ....

53 Nel polinomio $2ax + 4ay + 3x + 6y$ avremmo potuto anche effettuare raccoglimenti .... differenti.

Avremmo potuto, ad esempio, mettere in evidenza tra il primo e il terzo termine il fattore .... e tra il secondo e il quarto termine il fattore ....

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

54 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimenti parziali.

a) $2ax + 2bx + 3ay + 3by$

Raccogliendo il fattore comune $2x$ tra i primi due termini e il fattore $3y$ tra gli ultimi due, otteniamo:

$$2x(a+b) + 3y(a+b)$$

da cui, mettendo in evidenza $(a+b)$, si ottiene la fattorizzazione del polinomio dato:

$$(a+b)(2x+3y)$$

Allo stesso risultato si giunge anche operando nel modo seguente:

$$2ax + 2bx + 3ay + 3by = a(2x+3y) + b(2x+3y) = (2x+3y)(a+b)$$

b) $ax + bx + cx - 2ay - 2by - 2cy =$

$= x(a+b+c) - 2y(a+b+c) = (a+b+c)(x-2y)$

Oppure:

$ax + bx + cx - 2ay - 2by - 2cy = a(x-2y) + b(x-2y) + c(x-2y) =$

$= (x-2y)(a+b+c)$

ESERCIZIO GUIDATO

55 Scomponi in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimenti parziali.

a) $abc + a^2b^2 - 3c - 3ab$

$\underbrace{abc + a^2b^2}\ \overbrace{-3c - 3ab} = ab(c + \ldots\ldots)\ldots\ldots 3(c + \ldots\ldots) = (\ldots\ldots + ab)(\ldots\ldots - 3)$

b) $3x^2 - xy - 15x + 5y + 3xt - yt$

$\underbrace{3x^2 - xy}\ \overbrace{-15x + 5y}\ \underbrace{+3xt - yt} = \ldots\ldots(3\ldots\ldots - \ldots\ldots)\ldots\ldots 5(3x\ldots\ldots y) + t(\ldots\ldots - y) = (3x\ldots\ldots y)(x\ldots\ldots 5 + \ldots\ldots)$

Completa.

56 a) $ay + 2by + ax + 2bx = y(\ldots\ldots + \ldots\ldots) + x(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

oppure:

$ay + 2by + ax + 2bx = a(\ldots\ldots + \ldots\ldots) + 2b(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

b) $t^4 + t^3 + 3t + 3 = t^3(\ldots\ldots + \ldots\ldots) + 3(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

oppure:

$t^4 + t^3 + 3t + 3 = t(\ldots\ldots + \ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots + \ldots\ldots) = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

57 a) $2y - y^2 + 2a - ay = y(\ldots - \ldots) + a(\ldots - \ldots) = (\ldots)(\ldots)$

oppure:

$2y - y^2 + 2a - ay = 2(\ldots + \ldots) - y(\ldots + \ldots) = (\ldots)(\ldots)$

b) $5x^3 + x^2y - 10x - 2y = x^2(\ldots) - 2(\ldots) = (\ldots)(\ldots)$

oppure:

$5x^3 + x^2y - 10x - 2y = 5x(\ldots) + y(\ldots) = (\ldots)(\ldots)$

Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimenti parziali.

58 $a^3 + a^2 - ab - b$ $\qquad ab - b^2 - am + bm$ $\qquad [(a+1)(a^2-b);\ (a-b)(b-m)]$

59 $a^2b^2 + 1 + a^2 + b^2$ $\qquad x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ $\qquad [(a^2+1)(b^2+1);\ (x-2)(x^2+4)]$

60 $3a^2 + 5ab^2 - 6a - 10b^2$ $\qquad 8x^3 - 12x^2 + 2x - 3$ $\qquad [(3a+5b^2)(a-2);\ (2x-3)(4x^2+1)]$

61 $2px + 6qy + 2py + 6qx$ $\qquad 7b - 14by + y - 2y^2$ $\qquad [2(x+y)(p+3q);\ (1-2y)(7b+y)]$

62 $3cx + 3bx + cy + by$ $\qquad dx^2 + 5cx^2 + 2dy^2 + 10cy^2$ $\qquad [(c+b)(3x+y);\ (5c+d)(x^2+2y^2)]$

63 $6cx - 3cy - 2ay + 4ax$ $\qquad 15az^2 - 3bz^2 + 5ay^2 - by^2$ $\qquad [(2a+3c)(2x-y);\ (5a-b)(y^2+3z^2)]$

64 $5az - 5bz + 2ay - 2by$ $\qquad ax + ay - bx - by$ $\qquad [(a-b)(5z+2y);\ (a-b)(x+y)]$

65 $y^2 + ay - by - ab$ $\qquad 35 + ab + 5a + 7b$ $\qquad [(a+y)(y-b);\ (a+7)(b+5)]$

66 $6 - 3z + xz - 2x$ $\qquad am + bm - an - bn + a + b$ $\qquad [(x-3)(z-2);\ (a+b)(m-n+1)]$

67 $am + bm + 5a + 5b$ $\qquad a^3 + a^2 + a + 1$ $\qquad [(a+b)(m+5);\ (a+1)(a^2+1)]$

68 $4x^2 - 20xy + 3x - 15y$ $\qquad 56x^2 - 40xy + 63xz - 45yz$ $\qquad [(x-5y)(4x+3);\ (7x-5y)(8x+9z)]$

69 $10x^2 - 25xz - 6xy + 15yz$ $\qquad ac + bd - ad - bc$ $\qquad [(2x-5z)(5x-3y);\ (a-b)(c-d)]$

70 $am + bm + cm - an - bn - cn + a + b + c$ $\qquad [(a+b+c)(m-n+1)]$

71 $6ac - 9bc + 3c - 4ad + 6bd - 2d + 2a - 3b + 1$ $\qquad [(2a-3b+1)(3c-2d+1)]$

72 $-12a^4 + 24a^2b^2 - 20a^3b + 40ab^3$ $\qquad [4a(2b^2-a^2)(3a+5b)]$

73 $a^3 + a^2 + ab + b - a - 1$ $\qquad xy^2 - xy - x + y^2 - y - 1$ $\qquad [(a+1)(a^2+b-1);\ (x+1)(y^2-y-1)]$

74 $2ay + 2by + 2cy - 2a^2 - 2ab - 2ac$ $\qquad [2(a+b+c)(y-a)]$

75 $5bz - b - 2bx + a - 5az + 2ax$ $\qquad [(a-b)(2x-5z+1)]$

76 $4px - 16py + 8p + 3qx - 12qy + 6q$ $\qquad [(x-4y+2)(4p+3q)]$

77 $5a^3 + 5a^2 - 5ab^2 - 2a^2b - 2ab + 2b^3$ $\qquad [(a^2+a-b^2)(5a-2b)]$

78 $3a^2 + 6ab + 3ac - 2ab^2 - 4b^3 - 2b^2c$ $\qquad [(a+2b+c)(3a-2b^2)]$

79 $a^3 + a^2b + a^2c - abc - b^2c - bc^2$ $\qquad [(a+b+c)(a^2-bc)]$

80 $a^2 - ab + ac - a - ad + bd - cd + d$ $\qquad [(a-b+c-1)(a-d)]$

81 $2a^3 + 2a^2b + 2ta^3 + 2ta^2b + 2qa^3 + 2qa^2b$ $\qquad [2a^2(a+b)(1+t+q)]$

ESERCIZIO SVOLTO

82 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi.

a) $5(x+y)-4ax-4ay$

Non conviene eseguire i calcoli; osserviamo che, mettendo in evidenza tra gli ultimi due termini il fattore $-4a$, otteniamo un polinomio in cui sarà possibile effettuare un raccoglimento totale:

$$5(x+y)-4a(x+y)=(x+y)(5-4a)$$

b) $a^2bc+a^3b^2+3ac+3a^2b$

È possibile, prima di tutto, eseguire un raccoglimento a fattor comune:

$$a(abc+a^2b^2+3c+3ab)$$

Effettuiamo ora un raccoglimento parziale tra i termini dentro parentesi tonda:

$$a[ab(c+ab)+3(c+b)]=a(ab+3)(c+ab)$$

ESERCIZIO GUIDATO

83 Scomponi in fattori i seguenti polinomi.

a) $5a(2a-1)-16a^2+8a=$

$=5a(2a-1)-8a(\dots a \dots 1)=$

$=(2a-1)(5a-\dots a)=-3a\,(\dots\dots)$

b) $3ax+3ab-5a^2xy-5a^2by=$

$=\dots(3x+3b-5axy-5\dots y)=$

$=a[\dots(x+b)\dots 5ay(x+b)]=a(x+b)(\dots-5ay)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi.

84 $(x+y)(x-y)-3x-3y+xy^2+y^3$ $[(x+y)(x-y-3+y^2)]$

85 $(2p+5q)(3x-4)+(2p+5q)$ $[3(2p+5q)(x-1)]$

86 $21a^5b^4-9a^4b^5+42a^6b^5-18a^5b^6$ $[3a^4b^4(7a-3b)(1+2ab)]$

87 $2a^5+4a^4+4a^3+8a^2$ $[2a^2(a+2)(a^2+2)]$

88 $3a^5+12a^4+2a+8$ $[(a+4)(3a^4+2)]$

89 $5x^5y+20x^4y^2+xy+4y^2$ $[y(x+4y)(5x^4+1)]$

90 $(x+2y)^2+axy+2ay^2$ $[(x+2y)(x+2y+ay)]$

91 $2ab-3a+(2b-3)^2$ $[(2b-3)(a+2b-3)]$

CACCIA ALL'ERRORE

92 Nell'eseguire le seguenti scomposizioni sono stati commessi degli errori. Individuali e correggili.

a) $2x^3-3xy+2x^2y-3y^2=2x^2(x+y)-3y(x-y)=(x+y)(x-y)(2x^2-3y)$

b) $4x^3-10x^2-2x+5=2x^2(2x-5)-1(2x-5)=(2x-5)(2x^2+1)$

c) $5a^2-10a^3+20=5a^2(1-2a+4)$

d) $3xy-12z-6xy^2-24zy=3xy(1-2y)-12z(1-2y)=(3xy-12z)(1-2y)$

TROVA L'INTRUSO

93 Quale dei seguenti polinomi non è scomponibile mediante un raccoglimento parziale?

a) $x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$ b) $6a^2 - 10ab + 4b^2$ c) $15x^3 + 5x^2 - 6x - 2$

Scomposizione mediante prodotti notevoli

SCOMPOSIZIONE DELLA DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

START

94 $A^2 - B^2 = (A + B)(A \dots\dots B)$.

95 Mentre il binomio $A^2 - B^2$ è riducibile nel prodotto tra la .... e la differenza dei termini A e B, il binomio $A^2 + B^2$ è ....

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

96 Scomponiamo i seguenti binomi.

a) $4x^2 - y^2 = (2x)^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$

b) $\frac{36}{25}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = \left(\frac{6}{5}x\right)^2 - \left(\frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{6}{5}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{6}{5}x - \frac{1}{3}y\right)$

ESERCIZIO GUIDATO

97 Scomponi in fattori i seguenti binomi.

a) $9a^2x^4 - 36b^6 =$

$= (3ax^{\dots} + \dots b^{\dots})(3ax^{\dots} \dots \dots b^3)$

b) $\frac{1}{16}x^4 - 81y^8z^{12} =$

$= \left(\frac{\dots}{4}x^2 + \dots y^4z^{\dots}\right)\left(\frac{\dots}{4}x^2 \dots 9y^4z^{\dots}\right) =$

$= \left(\frac{\dots}{4}x^2 + \dots y^4z^{\dots}\right)\left(\frac{\dots}{2}x + 3y^2z^{\dots}\right)\left(\frac{\dots}{2}x - 3y^2z^3\right)$

Scomponi, se possibile, in fattori i seguenti binomi.

98 $a^2 - 4$ $a^2 + 6$ $[(a+2)(a-2);\ \text{irriducibile}]$

99 $x^2 - y^2z^2$ $a^2x^2 - b^2y^2$ $[(x+yz)(x-yz);\ (ax+by)(ax-by)]$

100 $1 - x^4$ $x^2 - 4a^2$ $[(1-x)(1+x)(1+x^2);\ (x+2a)(x-2a)]$

101 $16x^4 - 25y^2$ $\frac{1}{4} + x^4$ $[(4x^2+5y)(4x^2-5y);\ \text{irriducibile}]$

102 $a^4 - b^4$ $49a^6 - 4$ $[(a+b)(a-b)(a^2+b^2);\ (7a^3+2)(7a^3-2)]$

103 $x^8 - y^{25}$ $9x^6 - 64y^4$ $[(x^4-y^5)(x^4+y^5);\ (3x^3-8y^2)(3x^3+8y^2)]$

104 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^4$ $\qquad \frac{4}{25}x^2 - \frac{16}{9}y^2$ $\qquad \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y^2\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y^2\right); \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{3}y\right)\left(\frac{2}{5}x + \frac{4}{3}y\right)\right]$

105 $8x^6y^3 - a^4z^4$ $\qquad \frac{4}{25}x^2y^6 - a^8z^6$ $\qquad \left[\text{Irriducibile}; \left(\frac{2}{5}xy^3 + a^4z^3\right)\left(\frac{2}{5}xy^3 - a^4z^3\right)\right]$

106 $x^4 - 16y^4$ $\qquad a^4x^8 - 1$ $\qquad [(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y); (a^2x^4 + 1)(ax^2 + 1)(ax^2 - 1)]$

107 $a^8 - b^8$ $\qquad a^8 - b^{16}$ $\qquad [(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b); (a^4 + b^8)(a^2 + b^4)(a + b^2)(a - b^2)]$

108 $t^6z^4 - 100$ $\qquad 16a^2 - \frac{1}{81}t^4$ $\qquad \left[(t^3z^2 + 10)(t^3z^2 - 10); \left(4a + \frac{1}{9}t^2\right)\left(4a - \frac{1}{9}t^2\right)\right]$

109 $16a^4 - 81y^4$ $\qquad x^4 - 625$ $\qquad [(4a^2 + 9y^2)(2a + 3y)(2a - 3y); (x^2 + 25)(x + 5)(x - 5)]$

ESERCIZIO SVOLTO

110 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

a) $\frac{5}{9}x^3y^2 - 5x = 5x\left(\frac{1}{9}x^2y^2 - 1\right) = 5x\left(\frac{1}{3}xy + 1\right)\left(\frac{1}{3}xy - 1\right)$

b) $3a^3 - 12ap^2 + 5a^2b - 20bp^2 = 3a(a^2 - 4p^2) + 5b(a^2 - 4p^2) =$
$= (a^2 - 4p^2)(3a + 5b) = (a + 2p)(a - 2p)(3a + 5b)$

ESERCIZIO GUIDATO

111 Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

a) $12ax^3 - 27a^3xy^6 =$
$= 3ax(4x^2 - \ldots a^2y^6) =$
$= 3ax(2x + \ldots ay^{\ldots})(2x \ldots 3ay^{\ldots})$

b) $16x^2 + x^4 - 16b^2 - x^2b^2$
$\underbrace{16x^2 + x^4}\ \overbrace{-16b^2 - x^2b^2} =$
$= x^2(16 + x^{\ldots}) - b^2(16 + x^{\ldots}) =$
$= (16 + x^{\ldots})(x^{\ldots} - b^{\ldots}) =$
$= (16 + x^{\ldots})(x + \ldots)(x \ldots b)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

112 $a - 9ab^2$ $\qquad 12a^3y^2 - 27a^3x^2$ $\qquad [a(1 - 3b)(1 + 3b); 3a^3(2y + 3x)(2y - 3x)]$

113 $\frac{4}{9}x^3 - \frac{9}{4}x$ $\qquad 4x^5 - 16x^3y^2$ $\qquad \left[x\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right); 4x^3(x + 2y)(x - 2y)\right]$

114 $3ab^2 - 3a^3$ $\qquad 3a^2x - 3x^3$ $\qquad [3a(b + a)(b - a); 3x(a - x)(a + x)]$

115 $a^3b - ab^3$ $\qquad -7ab^2 + 7ax^2$ $\qquad [ab(a - b)(a + b); -7a(b + x)(b - x)]$

116 $a^5x^5y - axy$ $\qquad [axy(a^2x^2 + 1)(ax - 1)(ax + 1)]$

117 $b + 2 - a^2b - 2a^2$ $\qquad 4x^2 - y^2 + 2xz - yz$ $\qquad [(2 + b)(1 + a)(1 - a); (2x - y)(2x + y + z)]$

118 $9a^2 - 4b^2 + 3ac + 2bc$ $\qquad [(3a + 2b)(3a - 2b + c)]$

119 $25a^3 - 25a^2 - a + 1$ $[(a-1)(5a+1)(5a-1)]$

120 $4b^2x^2 - 36b^2 + x^2 - 9$ $[(x+3)(x-3)(4b^2+1)]$

121 $x^2 - 4b^2x^2 + 9 - 36b^2$ $[(1+2b)(1-2b)(x^2+9)]$

122 $4a + 4b + 4c - ax^2 - bx^2 - cx^2$ $[(a+b+c)(2+x)(2-x)]$

123 $a^2x + a^2y + a^2 - 36x - 36y - 36$ $[(a+6)(a-6)(x+y+1)]$

124 $16t^5 - \dfrac{1}{16}t$ $\left[t\left(4t^2+\dfrac{1}{4}\right)\left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

ESERCIZIO SVOLTO

125 Utilizzando l'uguaglianza $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, dove A e B sono polinomi, scomponiamo in fattori i seguenti polinomi

a) $(a+2b)^2 - 9c^2 = (a+2b)^2 - (3c)^2 = (a+2b+3c)(a+2b-3c)$

b) $25x^2y^2 - (3x-4y)^2 = (5xy)^2 - (3x-4y)^2 = [5xy + (3x-4y)][5xy - (3x-4y)] =$
$= (5xy + 3x - 4y)(5xy - 3x + 4y)$

c) $(3a-b)^2 - (2c-d)^2 = [(3a-b) + (2c-d)][(3a-b) - (2c-d)] =$
$= (3a - b + 2c - d)(3a - b - 2c + d)$

ESERCIZIO GUIDATO

126 Utilizzando l'uguaglianza $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, dove A e B sono polinomi, scomponi in fattori i seguenti polinomi

a) $(2a-3)^2 - 4$
$= [(2a-3) + \ldots][(\ldots\ldots) \ldots 2] = (2a - \ldots)(\ldots - 5)$

b) $9x^4 - (x^2+1)^2$
$= (3x^{\ldots})^2 - (x^2+1)^2 = [3x^{\ldots} + (x^2+1)][3x^{\ldots} \ldots(x^2+1)] = (\ldots x^2 + 1)(2x^2 \ldots 1)$

c) $(a+1)^2 - (2a-5)^2$
$= [(a+1)\ldots(2a-5)][(a+1) - (\ldots\ldots)] = (3a - \ldots)(-a + \ldots)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando l'uguaglianza $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, dove A e B sono polinomi.

127 $(a+2b)^2 - 4a^2b^2$ $[(a+2b-2ab)(a+2b+2ab)]$

128 $(2a-4)^2 - 9a^2$ $(x^2y^2-3)^2 - 25x^4y^4$ $[(5a-4)(-a-4);\ (6x^2y^2-3)(-4x^2y^2-3)]$

129 $a^2 - (b+c)^2$ $c^2 - (a+b)^2$ $[(a+b+c)(a-b-c);\ (a+b+c)(c-a-b)]$

130 $(2xy-1)^2 - 4x^2y^2$ $(3ab-5)^2 - 9a^2b^2$ $[-4xy+1;\ -5(6ab-5)]$

131 $x^2 - (3x+1)^2$ $x^2 - (3x-1)^2$ $[-(4x+1)(2x+1);\ (4x-1)(-2x+1)]$

132 $16a^2b^2 - (2-ab)^2$ $16a^2b^2 - (1+ab)^2$ $[(3ab+2)(5ab-2);\ (5ab+1)(3ab-1)]$

133 $(x+y)^2 - (z+t)^2$ $(x+y)^2 - (x-y)^2$ $[(x+y+z+t)(x+y-z-t);\ 4xy]$

134 $(2a+1)^2 - (a-1)^2$ $(3a-1)^2 - (2-a)^2$ $[3a(a+2);\ (2a+1)(4a-3)]$

135 $(a-b)^2 - b^2$ $(2a+3)^2 - (a-1)^2$ $[a(a-2b);\ (3a+2)(a+4)]$

CACCIA ALL'ERRORE

136 Individua e correggi gli errori che sono stati commessi nelle seguenti scomposizioni.
a) $16x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$ b) $x^4 - y^9 = (x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$
c) $16x^2 - (x + 1)^2 = (5x - 1)(3x + 1)$ d) $4x^2 + 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$

TROVA L'INTRUSO

137 Quale dei seguenti polinomi non è una differenza di due quadrati?
a) $81x^6 - 1$ b) $x^4 - (3xy - 2a)^2$ c) $1 - 18a^2y^5$ d) $25 - 4y^{12}$

TRINOMIO SCOMPONIBILE NEL QUADRATO DI UN BINOMIO

START

138 Nel trinomio $x^2 + 6xy + 9y^2$, possiamo vedere x^2 come quadrato di ...., ... come quadrato di $3y$ e verificare che .... è il .... prodotto di x per $3y$.

139 Un trinomio in cui due termini siano i quadrati di due monomi e il terzo termine sia il doppio .... dei monomi stessi, può essere espresso come quadrato di un binomio. Vale la seguente uguaglianza: $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^{......}$

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

140 Scomponiamo i seguenti trinomi in quadrati di binomi.

a) $a^2 + 14a + 49$

$(a)^2 \qquad (7)^2$
- Individuiamo due quadrati perfetti.

$2 \cdot a \cdot 7 = 14a$
- Controlliamo se il termine rimanente è il doppio prodotto delle basi dei quadrati.

$+14a$
- Controlliamo il segno del doppio prodotto nel trinomio.

$\rightarrow a^2 + 14a + 49 = (a + 7)^2$

b) $25x^6 - 10x^3 + 1$

$(5x^3)^2 \qquad (1)^2$
- Individuiamo i quadrati perfetti e determiniamo le basi.

$2 \cdot 5x^3 \cdot 1 = 10x^3$
- Controlliamo il doppio prodotto delle basi.

$-10x^3$
- Controlliamo il segno del doppio prodotto nel trinomio.

$\rightarrow 25x^6 - 10x^3 + 1 = (5x^3 - 1)^2$

ESERCIZIO GUIDATO

141 Scomponi i seguenti trinomi in quadrati di binomi.
a) $4x^4 + 1 + 4x^2 = (......x^{......})^2 + (......)^2 + 2(2x^2) \cdot ...... = (2x^{......} \; ...... 1)^2$
b) $-25y^2 + 20y - 4 = -(25y^2 \; ...... \; 20y \; ...... \; 4) = -[(......y)^2 + ...^2 - 2(......y) \cdot 2] = -(......y - ......)^2$

Scomponi, se possibile, i seguenti trinomi in quadrati di binomi.

142 x^2+2x+1 $\quad a^2+4ab+4b^2$ $\quad [(x+1)^2;\ (a+2b)^2]$

143 $4x^2-12x+9$ $\quad a^2b^2+x^2-2abx$ $\quad [(2x-3)^2;\ (ab-x)^2]$

144 $\frac{1}{9}y^2-\frac{2}{3}y+1$ $\quad x^6+8x^3+16$ $\quad \left[\left(\frac{1}{3}y-1\right)^2;\ (x^3+4)^2\right]$

145 $4x^2+4x+1$ $\quad a^2-2a+4$ $\quad [(2x+1)^2;\ \text{irriducibile}]$

146 $4a^2+2ab+\frac{1}{4}b^2$ $\quad 9x^2+4y^2+12xy$ $\quad \left[\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2;\ (3x+2y)^2\right]$

147 $25a^2+16-20a$ $\quad a^2b^2+c^2-2abc$ $\quad [\text{Irriducibile};\ (ab-c)^2]$

148 $4a^2b^4+1+4a^4b^8$ $\quad \frac{4}{9}x^2+\frac{20}{3}xy+25y^2$ $\quad \left[(2a^2b^4+1)^2;\ \left(\frac{2}{3}x+5y\right)^2\right]$

149 $25y^4-10y^2+1$ $\quad 49t^2+56t+16$ $\quad [(5y^2-1)^2;\ (7t+4)^2]$

150 $9y^2-48y+64$ $\quad x^2y^2-3xy+\frac{9}{4}$ $\quad \left[(3y-8)^2;\ \left(xy-\frac{3}{2}\right)^2\right]$

151 $25a^2+49t^2+35at$ $\quad 49a^2-70at+25t^2$ $\quad [\text{Irriducibile};\ (7a-5t)^2]$

152 $4a^2x^2+4a^4x^4+1$ $\quad a^8+4a^4+4$ $\quad [(2a^2x^2+1)^2;\ (a^4+2)^2]$

153 x^6+2x^3+1 $\quad x^4+2x^2+1$ $\quad [(x^3+1)^2;\ (x^2+1)^2]$

154 x^4+4x^2+4 $\quad a^6+2a^3b^2+b^4$ $\quad [(x^2+2)^2;\ (a^3+b^2)^2]$

155 $16x^6-16x^3y^2+4y^4$ $\quad 9m^4-12m^2n^2+4n^4$ $\quad [(4x^3-2y^2)^2;\ (3m^2-2n^2)]$

156 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{9}y^2$ $\quad a^2-\frac{4}{5}ab^2-\frac{4}{25}b^4$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y\right)^2;\ \text{irriducibile}\right]$

157 $\frac{1}{9}a^4-\frac{2}{15}a^2b^3+\frac{1}{25}b^6$ $\quad -4a^2-12a-9$ $\quad \left[\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{5}b^3\right)^2;\ -(2a+3)^2\right]$

158 $64a^{12}-48a^6+9$ $\quad -49a^2+14a-1$ $\quad [(8a^6-3)^2;\ -(7a-1)^2]$

159 $-a^2+10a-25$ $\quad -b^2+2ab-a^2$

160 $-y^2-18y-81$ $\quad -\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2+\frac{1}{3}ab$

161 $-9x^2-12xy-4y^2$ $\quad -y^4-2y^2-1$

162 $-y^6-4+4y^3$ $\quad -x^4-9y^2-6x^2y$

ESERCIZIO SVOLTO

163 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

a) $36x^4-24x^3+4x^2=4x^2(9x^2-6x+1)=4x^2(3x-1)^2$

b) $3ax^2-30ax+75a+bx^2-10bx+25b=3a(x^2-10x+25)+b(x^2-10x+25)=$
$=(x^2-10x+25)(3a+b)=(x-5)^2(3a+b)$

ESERCIZIO GUIDATO

164 Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

a) $3a^3b-12a^2b+12ab=3ab(a^{\dots}\dots 4a+\dots)=\dots\cdot(a-\dots)^2$

b) $a^2(2a+1)+4a(2a+1)+4(2a+1)=(\dots\dots)(a^2+4a+\dots)=(\dots\dots)(a+\dots)^2$

c) $b^2(a^2-1)-2b(a^2-1)+(a^2-1)=(a^2-1)(\dots\dots)=(a+1)(a\dots 1)(b\dots 1)^{\dots}$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando i metodi fino a ora studiati.

165 $3a^6b^2y - 3a^4by^2 + \frac{3}{4}a^2y^3$ $\quad 3a^2 + 12ab + 12b^2$ $\quad \left[3a^2y\left(a^2b - \frac{1}{2}y\right)^2;\ 3(a+2b)^2\right]$

166 $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$ $\quad 2y^3 - 4y^2 + 2y$ $\quad [x(3x-2y)^2;\ 2y(y-1)^2]$

167 $4x^2 - 8xy^2 + 4y^4$ $\quad 4ax^2y - 2ax^4 - 2ay^2$ $\quad [4(x-y^2)^2;\ -2a(x^2-y)^2]$

168 $x^3 + 2x^2y + xy^2$ $\quad a^3b - 2a^2bc + abc^2$ $\quad [x(x+y)^2;\ ab(a-c)^2]$

169 $8a^4b^2 - 48a^3b^2 + 72a^2b^2$ $\quad x^8 - 8x^4y^2 + 16y^4$ $\quad [8a^2b^2(a-3)^2;\ (x^2-2y)^2(x^2+2y)^2]$

170 $a^5y^3 - 2a^3y^2 + ay$ $\quad [ay(a^2y-1)^2]$

171 $a^2c + a^2y + b^2c + b^2y + 2abc + 2aby$ $\quad [(c+y)(a+b)^2]$

172 $4a^2x + 4a^2y + 9b^2x + 9b^2y + 12abx + 12aby$ $\quad [(x+y)(2a+3b)^2]$

173 $ayx^8 + 9ayx^2 + 6ayx^5$ $\quad [ayx^2(x^3+3)^2]$

CACCIA ALL'ERRORE

174 Individua l'errore che è stato commesso nella seguente scomposizione e correggilo.
$-a^2 + 2ay^2 - y^4 = (-a - y^2)^2$

TROVA L'INTRUSO

175 Quale dei seguenti trinomi non è lo sviluppo del quadrato di un binomio?
a) $a^6 - a^3b + b^2$ b) $x^4 + 4x^2y^5 + 4y^{10}$ c) $a^2 + 2ab + b^2$

POLINOMIO SCOMPONIBILE NEL QUADRATO DI UN TRINOMIO

START

176 $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC\ldots\ldots + 2AC\ldots\ldots = (A + B + \ldots\ldots)^2$

177 Il polinomio $x^2 + 9y^2 - c^4 + 6xy + 6c^2y + 2c^2x$ non può essere lo sviluppo del quadrato di un trinomio, poiché ci sono solo due quadrati perfetti (precisamente .... e ....): il termine $-c^4$, infatti, non è il quadrato di alcun monomio poiché è ....

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

178 Scomponiamo i seguenti polinomi in quadrati di trinomi.

a) $4a^4 + 25b^2 + 9 + 20a^2b + 12a^2 + 30b =$
$= (2a^2)^2 + (5b)^2 + 3^2 + 2(2a^2)(5b) + 2(2a^2)3 + 2(5b)3 = (2a^2 + 5b + 3)^2$

b) $9x^2 + 4y^2 + 1 - 12xy + 6x - 4y =$
$= (3x)^2 + (-2y)^2 + 1^2 + 2(3x)(-2y) + 2(3x)\cdot 1 + 2(-2y)\cdot 1 = (3x - 2y + 1)^2$

ESERCIZIO GUIDATO

179 Scomponi i seguenti polinomi in quadrati di trinomi.

a) $x^2 + 9y^2 + c^4 + 6xy + 6c^2y + 2c^2x =$
$= x^2 + (\dots)^2 + (c^{\dots})^2 + 2 \cdot x \cdot (3 \dots) + 2 \cdot x \cdot c^2 + 2 \cdot (3 \dots)c^{\dots} = (x + 3 \dots + \dots^2)^{\dots}$

b) $16a^2 + 25b^2 + c^4 - 40ab + 10bc^2 - 8ac^2 =$
$= (4 \dots)^2 + (-5 \dots)^2 + (-c^2)^{\dots} + 2 \cdot \dots \cdot (-5b) + 2 \cdot (-5b) \cdot (-c^2) + 2 \cdot 4a(-c^2) =$
$= (4a - 5b \dots c^{\dots})^2$

Scomponi, se possibile, i seguenti polinomi in quadrati di trinomi.

180 $a^2 - 2ab + b^2 + 4ac - 4bc + 4c^2$ $[(a - b + 2c)^2]$

181 $4x^2 + a^2 + 4b^2 - 4ax - 8bx + 4ab$ $[(a + 2b - 2x)^2]$

182 $x^6 + 9x^2 - 6x^4 + x^3 + 3x + \frac{1}{4}$ [Irriducibile]

183 $a^2 + 4ab + 4b^2 - 6ax - 12bx + 9x^2$ $[(a + 2b - 3x)^2]$

184 $a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b$ $[(a + b - 1)^2]$

185 $y^2 + 4x^2 + 4xy - 4y - 8x + 4$ $[(2x + y - 2)^2]$

186 $a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b$ $[(a - b - 1)^2]$

187 $25x^8 + \frac{1}{4}x^4 + 16 - 5x^6 + 40x^4 - 4x^2$ $\left[\left(5x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4\right)^2\right]$

188 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 2bc$ [Irriducibile]

189 $4a^2 + x^2 + 4ax + 2ay + xy + \frac{1}{4}y^2$ $\left[\left(2a + x + \frac{1}{2}y\right)^2\right]$

190 $a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab - \frac{4}{3}ac + \frac{2}{3}bc + \frac{4}{9}c^2$ $\left[\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{2}{3}c\right)^2\right]$

191 $4x^2 + \frac{4}{9}y^2 + 9 - \frac{8}{3}xy + 12x - 4y$ $\left[\left(2x - \frac{2}{3}y + 3\right)^2\right]$

192 $16x^4 + \frac{9}{16}x^2y^2 - 6x^3y + 16x^2 - 3xy + 4$ $\left[\left(4x^2 - \frac{3}{4}xy + 2\right)^2\right]$

CACCIA ALL'ERRORE

193 Individua l'errore che è stato commesso nella seguente scomposizione e correggilo.
$x^2 + 9y^2 + c^2 - 6xy + 6cy - 2cx = (x - y + c)^2$

TROVA L'INTRUSO

194 Quale dei seguenti polinomi non è lo sviluppo del quadrato di un trinomio?

a) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac - 2bc$ b) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 4ac - 2bc$

c) $4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc$ d) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$

QUADRINOMIO SCOMPONIBILE NEL CUBO DI UN BINOMIO

START

195 $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^{\dots}$.

Analogamente: $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = \dots\dots$

196 Quindi, un polinomio formato da .... termini può essere scritto come cubo di un binomio, se il polinomio dato contiene il cubo di due monomi e due .... prodotti, rispettivamente, del quadrato del primo monomio per il secondo e del primo monomio per il .... del secondo. Se tutti i termini del polinomio sviluppo del cubo di un binomio sono negativi, i due termini del binomio saranno entrambi ....

GO!

ESERCIZIO SVOLTO

197 Scomponiamo il seguente polinomio nel cubo di un binomio.

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

$(2x)^3 \qquad (-1)^3$

- Individuiamo due cubi.

$3 \cdot (2x)^2 \cdot (-1) = 3 \cdot 4x^2(-1) = -12x^2$

$3(2x) \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 2x \cdot 1 = +6x$

- Controlliamo che i due termini rimanenti siano i tripli prodotti necessari e completiamo lo sviluppo del cubo del binomio trovato.

$\rightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$

ESERCIZIO GUIDATO

198 Scomponi il seguente polinomio nel cubo di un binomio.

$a^3 + 6a^2y^2 + 12ay^4 + 8y^6 =$

$= a^3 + \dots a^{\dots}(2y^2) + 3 \dots(2y^2)^{\dots} + (2y^2)^{\dots} =$

$= (\dots + \dots)^3$

Scomponi i seguenti polinomi in cubi di binomi.

199 $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \qquad x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $\quad [(a+1)^3;\ (x-1)^3]$

200 $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 \qquad \frac{1}{27}s^3 + \frac{1}{3}s^2 + s + 1$ $\quad \left[(2a+1)^3;\ \left(\frac{1}{3}s+1\right)^3\right]$

201 $a^3 + a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{27} \qquad \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3} + x - 1$ $\quad \left[\left(a+\frac{1}{3}\right)^3;\ \left(\frac{x}{3}-1\right)^3\right]$

202 $\frac{1}{8}x^3 - 8y^3 - \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 \qquad 8x^3 + 6x^2y + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{8}y^3$ $\quad \left[\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^3;\ \left(2x+\frac{1}{2}y\right)^3\right]$

203 $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \qquad -\frac{1}{64}a^3 + \frac{3}{16}a^2b - \frac{3}{4}ab^2 + b^3$ $\quad \left[(2x+3)^3;\ \left(-\frac{1}{4}a+b\right)^3\right]$