Derivate

Indice

1 **Definizione di derivata** 1

2 **Calcolo di derivate** 5
2.1 Derivate di funzioni elementari . . . 5
2.2 Regole di derivazione . . . 6

3 **Il teorema del valor medio (di Lagrange)** 8

4 **Studio del comportamento locale di una funzione** 9

5 **Il teorema di De l'Hôpital** 11

6 **Derivate successive** 13

7 **Funzioni convesse** 15

8 **Soluzioni degli esercizi** 17

A **Appendice – Studio di funzione** 22

1 Definizione di derivata

Definizione Sia I un intervallo aperto e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in I$. Si chiama **rapporto incrementale** di f con punto iniziale x_0 il quoziente

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \text{ con } x \in I,\ x \neq x_0.$$

Osservazione Si chiama ovviamente rapporto incrementale in quanto è il rapporto di due incrementi,[1] e cioè della variazione dei valori di f (rispetto a $f(x_0)$) e della variazione dei valori della variabile (rispetto ad x_0).

Osservazione Nel rapporto incrementale x_0 (il punto iniziale) è fissato, mentre x è variabile. Naturalmente il rapporto incrementale è definito per x diverso da x_0. Non ha nessuna importanza se x è maggiore o minore di x_0, il rapporto incrementale è definito sempre attraverso la stessa formula.

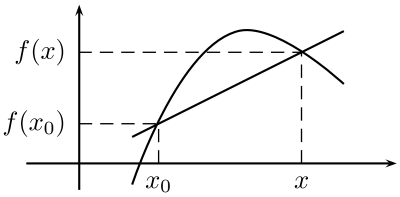
Osservazione Qual è il significato geometrico di questo rapporto? Quando si rapporta (si divide) una variazione in ordinata con una variazione in ascissa si ottiene una variazione in ordinata per unità di variazione in ascissa. In matematica, o meglio in geometria analitica, si dice anche *pendenza*. Se ho quindi due punti nel piano e calcolo il rapporto delle variazioni, ottengo la pendenza: di che cosa? naturalmente della retta che passa per quei due punti. Quindi il rapporto incrementale fornisce la pendenza della retta che passa per i due punti (vedi figura pagina seguente) $\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $\big(x, f(x)\big)$. C'è un termine più tecnico per indicare la volgare pendenza, ma è esattamente lo stesso, ed è il *coefficiente angolare*, perché è chiaro che c'è una dipendenza diretta tra la pendenza della retta e la misura dell'angolo che essa forma con l'asse delle x. Ultima cosa: chiaramente la pendenza di cui parliamo dipende da x.

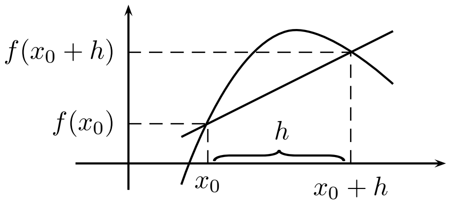
Osservazione Il rapporto incrementale si può anche scrivere in una forma leggermente diversa ma equivalente:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ con } x_0+h \in I,\ h \neq 0.$$

Semplicemente vuol dire chiamare h quello che prima era $x - x_0$ (vedi figura a destra nella pagina seguente).

[1] Sarebbe forse meglio dire *variazioni* e quindi rapporto variazionale, ma ormai lo hanno chiamato così. In ogni modo non si pensi che incremento voglia dire quantità positiva: può essere anche un decremento, cioè una quantità negativa.





Veniamo ora ad una definizione assolutamente fondamentale.

Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in (a, b)$. Diciamo che f è **derivabile da destra** in x_0 se il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{è un numero reale, cioè esiste ed è finito.}$$

In questo caso chiamiamo **derivata destra** di f in x_0 tale numero, che viene indicato con la scrittura $f'_+(x_0)$. Si ha quindi

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si dice analogamente che f è **derivabile da sinistra** in x_0 se il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{è un numero reale, cioè esiste ed è finito.}$$

In questo caso tale numero si chiama **derivata sinistra** di f in x_0, e viene indicato con la scrittura $f'_-(x_0)$.

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile da sinistra e da destra in x_0, e $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, diciamo che f è **derivabile** in x_0 e chiamiamo **derivata** di f in x_0 il valore comune dei due limiti.

Possiamo quindi dire che la derivata di f in x_0 è il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ se questo è finito.}$$

La derivata di f in x_0 si indica con $f'(x_0)$, o anche con $Df(x_0)$ o con $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Osservazione Se utilizziamo la seconda forma del rapporto incrementale possiamo scrivere la derivata come

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

che in pratica si ottiene dall'altra forma con il cambio di variabile $x - x_0 = h$.

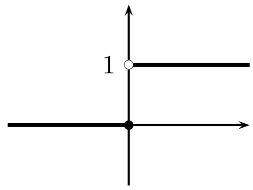
Osservazione Si noti che nella definizione di derivata l'intervallo in cui è definita la f è aperto e che quindi il punto x_0 è *interno* all'intervallo. Se l'intervallo fosse chiuso, diciamo $[a, b]$, non possiamo parlare quindi di derivata in a e in b, ma possiamo però parlare di derivata destra in a e derivata sinistra in b.

Esempi

- Sia $f(x) = mx + q$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = m$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{mx + q - mx_0 - q}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m.$$
  Lo studente provi a rifare i calcoli usando la seconda forma (quella con h), anche negli esempi che seguono.
- Sia $f(x) = x^2$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = 2x_0$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$
- Sia $f(x) = x^3$. Allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = 3x_0^2$.
  Infatti
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$



Se $x_0 > 0$, allora $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1-1}{x - x_0} = 0$.

Se $x_0 < 0$ in modo simile, si ha $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0-0}{x - x_0} = 0$. Quindi, $f'(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \neq 0$.

Vediamo ora come vanno le cose in $x_0 = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-0}{x} = 0,$$

e quindi $f'_-(0) = 0$, ma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-0}{x} = +\infty,$$

e quindi la funzione non è derivabile in 0 da destra. Quindi la derivata in 0 non esiste.

Esercizio 1.1 Scrivere il rapporto incrementale delle seguenti funzioni, con punto iniziale x_0 indicato.

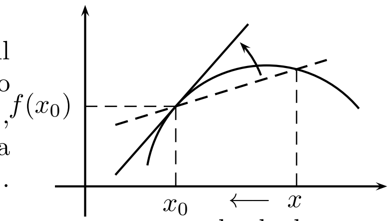
(a) $f(x) = \ln^2 x$, con $x_0 = e$

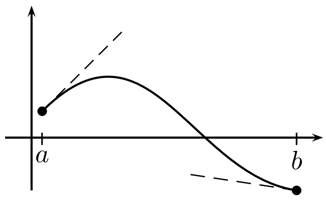
(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, con $x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x\ln(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, con $x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ e^x & x > 1 \end{cases}$, con $x_0 = 1$

Osservazione Come fatto prima con il rapporto incrementale, cerchiamo ora il significato geometrico della derivata di una funzione f in un punto x_0. Se il rapporto incrementale è la pendenza della retta passante per i due punti $\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $\big(x, f(x)\big)$, si intuisce che, facendo il limite per $x \to x_0$, tale retta "tende" alla retta che (vedi la figura a fianco) la geometria chiama *retta tangente* al grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.





Non mi dilungo su che cosa sia rigorosamente la retta tangente, pensando che lo studente ne abbia già un'idea abbastanza precisa. Ovviamente il significato geometrico si può adattare nel caso in cui si parli ad esempio di derivata destra nel primo estremo dell'intervallo o di derivata sinistra nel secondo estremo: si tratterà della pendenza della *semitangente* (semiretta tangente) destra o sinistra rispettivamente nei punti $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ (vedi figura a fianco).

Lo studente cerchi di intuire, pensando a qualche grafico particolare, che l'esistenza della derivata (ossia la derivabilità di f in un punto) è strettamente legata all'esistenza della retta tangente in quel punto. In altre parole non è detto che ci sia sempre la retta tangente.

Proposizione Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0 da destra (da sinistra), allora f è continua in x_0 da destra (da sinistra). Quindi se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Dimostrazione

Consideriamo il caso della derivabilità da destra; il caso della derivabilità da sinistra è analogo.

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 da destra. Significa che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

Ma allora

$$\lim_{x\to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell\right) = 0 \qquad \text{e cioè} \qquad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Pertanto il numeratore è trascurabile rispetto al denominatore per $x \to x_0^+$. Ma questo, come sappiamo, dato che il denominatore tende a zero, comporta che anche il numeratore tende a zero, e quindi che $f(x) - f(x_0) \to 0$ per $x \to x_0^+$. Questo non è che un modo equivalente di dire che $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0^+$, e cioè che f è continua da destra in x_0.

Osservazione Se quindi funzioni derivabili sono necessariamente continue, esistono però funzioni continue in un punto ma non derivabili in tale punto. Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua in 0, ma è facile verificare che

$$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0),$$

e dunque f non è derivabile in 0.

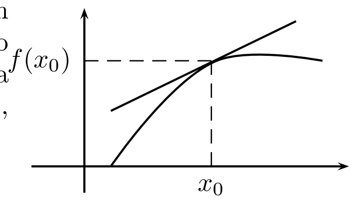
Osservazione Dalla proposizione segue anche che se una funzione non è continua in un punto, allora in quel punto non è nemmeno derivabile.

Osservazione Come già detto nella dimostrazione, la scrittura

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

significa che $f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0^+$, che può anche essere riscritta come $f(x) - f(x_0) = \ell(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0^+$. In questa relazione si può leggere il seguente profondo risultato: se f è derivabile in x_0, la variazione della funzione f (cioè $f(x) - f(x_0)$) è bene approssimata da una funzione lineare, (cioè $\ell(x - x_0)$) della variazione della variabile indipendente, o in altre parole la variazione di f è sostanzialmente proporzionale alla variazione della x (cioè $x - x_0$). Infatti la variazione di f è uguale ad $\ell(x - x_0)$ più una quantità trascurabile rispetto alla variazione della variabile indipendente.

Possiamo vedere in tutto questo l'aspetto geometrico: se una funzione è derivabile in un punto x_0, una retta è una buona approssimazione del grafico di f nelle vicinanze del punto $(x_0, f(x_0))$. Delle infinite rette passanti per tale punto una soltanto è quella che ha questa proprietà. Dalla proposizione si vede che tale retta ha equazione $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$, cioè



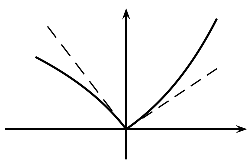
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Questa è quindi l'**equazione della retta tangente** al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

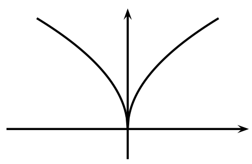
Vediamo ora alcune situazioni specifiche, anche da un punto di vista geometrico.

Definizioni

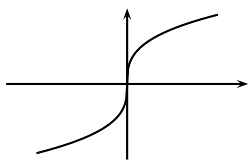
- Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile da sinistra e da destra in x_0, e $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, diciamo che f ha un *punto angoloso* in x_0.
- Se f è continua in x_0, $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, e almeno uno di questi due limiti è infinito, diciamo che f ha un *punto di cuspide* in x_0.
- Se f è continua in x_0 e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vale $+\infty$ oppure $-\infty$, diciamo che x_0 è un *punto a tangente verticale*.



Punto angoloso



Punto di cuspide



Punto a tangente verticale

Esempi

- La funzione $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in 0.

  Infatti, f è continua in 0 [2] e

$$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0).$$

[2] Si noti che per un punto angoloso x_0 la continuità nel punto stesso, anche se non esplicitamente prevista dalla definizione, è comunque una conseguenza delle altre ipotesi: infatti se la funzione deve essere derivabile da destra e da sinistra in x_0, allora è anche continua da destra e da sinistra, e quindi continua, in x_0.

- La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha un punto di cuspide in 0.

  Infatti, f è continua in 0 (composta di funzioni continue) e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

  mentre

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\sqrt{\frac{-x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\sqrt{\frac{-1}{x}}\right) = -\infty.$$

- La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha in 0 un punto a tangente verticale. Infatti, f è continua in 0 e

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

2 Calcolo di derivate

La derivabilità di una funzione è stata definita *in un punto*. Si può però estendere facilmente ad un intervallo. Diamo allora intanto queste definizioni.

Definizione Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **derivabile in** I se f è derivabile in ogni punto di I, con la precisazione che se l'intervallo comprende un estremo, diciamo che f è derivabile in tale intervallo se è derivabile nei punti interni e nell'estremo è derivabile da destra se è il primo e da sinistra se è il secondo.[3]

È chiaro ora che, se una funzione è derivabile in tutti i punti dell'intervallo, diciamo (a, b), in cui è definita, noi possiamo pensare alla nuova funzione che, ad ogni x dell'intervallo (a, b) associa la derivata in x, cioè $f'(x)$. In simboli si tratta della funzione

$$x \mapsto f'(x), \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

Questa è la *funzione derivata* di f nell'intervallo (a, b), ma la si continua a chiamare semplicemente derivata.

Si pone ora questa domanda: ci sono metodi, in particolare ci sono formule che, data l'espressione di una funzione f, mi forniscano, senza usare la definizione punto per punto, l'espressione della sua derivata f' in tutto l'intervallo?

Adesso ci procuriamo queste formule, e naturalmente partiamo dalle funzioni elementari. Successivamente daremo regole che permettono di derivare funzioni costruite a partire da funzioni elementari, mediante l'uso delle quattro operazioni e della composizione di funzioni.

2.1 Derivate di funzioni elementari

È chiaro che l'unica via è quella, per il momento, di usare la definizione di derivata. Quindi calcoliamo, con la definizione, la derivata di alcune funzioni elementari. Faremo uso dei limiti notevoli studiati alla fine della lezione sulle funzioni continue.

- *Funzione potenza.* Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^\alpha$. [4] Si ha $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$ per ogni α in $\mathbb{R}$, e ora lo dimostriamo.

  Calcoliamo la derivata in un generico $x_0 > 0$. Si ha (per esercizio si provi la forma con h):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} &= \frac{x_0^\alpha}{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{(x/x_0)^\alpha - 1}{(x/x_0) - 1} \\ \text{(ponendo } x/x_0 = 1 + y) \quad &= x_0^{\alpha-1} \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} \\ &= \alpha x_0^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

  ricordando il limite notevole potenza.

[3] Quindi, ad esempio, se dico che la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \sqrt{x}$, è derivabile in $[0, 1)$, intendo che è derivabile in $(0, 1)$ e derivabile da destra in 0 (cosa che tra l'altro è falsa). Si osservi che è quanto abbiamo fatto con la continuità: la continuità viene prima definita in un punto e poi estesa a tutto l'intervallo se la funzione è continua in tutti i punti dell'intervallo.

[4] Non includo lo zero nell'intervallo di definizione, e tanto meno i numeri negativi, perché sappiamo che la funzione potenza non è in tali valori definita qualunque sia α (ad esempio non è definita in zero se $\alpha = -1$ e non è definita sui negativi se $\alpha = 1/2$).

Consideriamo ora una funzione potenza definita anche in zero.[5] Per quanto riguarda la sua derivabilità (da destra) in $x = 0$ si tratta di calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}.$$

Tale limite esiste finito se e solo se $\alpha \geq 1$, nel qual caso vale 1 se $\alpha = 1$ e vale 0 se $\alpha > 1$.

Osservazione Quindi, ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, definita in $[0, +\infty)$, in $x = 0$ non è derivabile (da destra). Ricordando il grafico, è facile accorgersi che la retta tangente (semitangente) è verticale e coincide con la parte positiva dell'asse y.

- *Funzione esponenziale.* Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = b^x$. Si ha $f'(x) = b^x \ln b$.

  Lo dimostro usando questa volta la forma con h. In un generico $x_0 \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{b^{x_0+h} - b^{x_0}}{h} &= b^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} \\ &= b^{x_0} \ln b, \end{aligned}$$

  ricordando il limite notevole esponenziale.

  Osservazione Come caso particolare, assolutamente fondamentale, si ha che $D(e^x) = e^x$.

- *Funzione logaritmica.* Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \log_b x$. Si ha $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$, per ogni $x > 0$. Anche questa volta uso la forma con h. Fissato $x_0 > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\log_b(x_0 + h) - \log_b x_0}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_b \frac{x_0+h}{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} \\ \text{(dividendo sopra e sotto per } x_0\text{)} \qquad &= \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h/x_0} \\ &= \frac{1}{x_0 \ln b}, \end{aligned}$$

  ricordando il limite notevole logaritmico.

  Osservazione Come caso particolare si ha che $D(\ln x) = \frac{1}{x}$.

2.2 Regole di derivazione

Per le funzioni derivabili valgono risultati analoghi a quelli visti per le funzioni continue, che cioè somme, prodotti e quozienti di funzioni derivabili sono funzioni derivabili.

Supponiamo che I sia un intervallo, che $x_0 \in I$ e che $f, g : I \to \mathbb{R}$ siano derivabili in x_0.

Si può allora dimostrare che

- $f + g$ e fg sono derivabili in x_0 e

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0); \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0). \end{aligned}$$

  Queste forniscono le regole di derivazione rispettivamente di una somma e di un prodotto di due funzioni. Come si vede per la somma si tratta di una regola quasi naturale, per il prodotto no, dato che la derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate.

[5] Ricordo che la funzione potenza è definita in $x = 0$ solo se $\alpha > 0$.

Esempi Abbiamo

$$D\Big(\ln x + \sqrt{x}\Big) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$D\big(xe^x\big) = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x + xe^x.$$

- se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e si ha

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Questa fornisce la regola di derivazione del quoziente di due funzioni.

Esempio Abbiamo

$$D\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Immediate conseguenze dei risultati appena esposti sono:

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $D(\alpha f) = \alpha Df$.

  Quindi, in parole povere, le costanti possono essere "portate fuori" dal simbolo di derivazione. Pertanto, per derivare ad esempio la funzione $x \mapsto 2\ln x$ si farà $D(2\ln x) = 2D(\ln x) = \frac{2}{x}$.

- $D\left(\dfrac{1}{g}\right) = -\dfrac{Dg}{g^2}$.

  Questa formula si dimostra o con la derivata del quoziente o con la derivata della funzione composta, che vediamo subito. Così, dovendo derivare la funzione $x \mapsto 1/\ln x$ si può fare direttamente $D(\frac{1}{\ln x}) = -\frac{1/x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x\ln^2 x}$.

- Utilizzando la formula della derivata della funzione potenza e le regole di derivazione di somma e prodotto si ottiene che

$$D\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\Big) = \sum_{k=1}^{n} k a_k\, x^{k-1},$$

  con la quale si possono derivare tutti i polinomi.

  Esempio Se devo derivare il polinomio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, si ha $P'(x) = 6x^2 - 8x + 5$.

- Vale da ultimo la seguente importante *regola di derivazione della funzione composta.*

  Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $x \in (a, b)$ e che $f(x) \in (c, d)$. Se f è derivabile in x e g è derivabile in $f(x)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x e

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\, f'(x).$$

  Quindi la derivata della funzione composta si calcola con il prodotto delle derivate.

Esempi

- $D\big(\ln^2 x\big) = 2\ln x \cdot D(\ln x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$.
- $D\big(\sqrt{x^2+1}\big) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$.
- $D\left(\sqrt[3]{\ln x}\right) = D\left(\ln^{1/3} x\right) = \frac{1}{3}\ln^{-2/3} x \cdot D(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^{-2/3} x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.
- $D\big(e^{-x^2}\big) = e^{-x^2} \cdot D(-x^2) = -2xe^{-x^2}$.
- $D\big(\ln(x^2+x+1)\big) = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot D(x^2+x+1) = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot (2x+1)$.
- $D\left(\frac{1}{\ln x}\right) = D\left(\ln^{-1} x\right) = -\ln^{-2} x \cdot D(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}$.

  La regola si applica ovviamente anche a casi di composizione di tre (o più) funzioni, come ad esempio
- $D\left(\ln^2(1+2x)\right) = 2\ln(1+2x) \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot 2$ oppure $D\left(e^{\sqrt{1/x}}\right) = e^{\sqrt{1/x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1/x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})$.

Esercizio 2.1 Calcolare le funzioni derivate delle seguenti funzioni, usando le regole di derivazione.

(a) $f(x) = x^2 \ln x$ (b) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$

(c) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ (d) $f(x) = \ln(x + e^x)$

(e) $f(x) = (x^2 + e^x)^2$ (f) $f(x) = \sqrt{x^2 \ln x}$

(g) $f(x) = \dfrac{x + e^{2x}}{x + \ln(2x)}$ (h) $f(x) = \ln^2(x + \ln x)$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x + e^{-x}}$ (j) $f(x) = \ln(x \ln x)$

Esercizio 2.2 Scrivere l'equazione della retta tangente ai grafici delle seguenti funzioni, nei punti di ascissa x_0 indicata.

(a) $f(x) = x + \ln x$, con $x_0 = 1$ (b) $f(x) = xe^x$, con $x_0 = 1$

(c) $f(x) = x + \sqrt{x}$, con $x_0 = 4$ (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, con $x_0 = 1/2$

3 Il teorema del valor medio (di Lagrange)

Ecco ora due importanti risultati sulle funzioni derivabili in un intervallo.

Teorema (del valor medio, o di Lagrange). Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

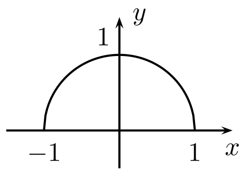
Teorema (di Rolle). Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = 0.$$

Non vediamo la dimostrazione di questi due teoremi. Vediamo invece qualche osservazione e tra breve le interpretazioni geometriche dei due risultati.

Osservazione Si noti che le ipotesi dei due teoremi chiedono che la funzione sia continua nell'intervallo chiuso e derivabile nei punti interni di tale intervallo. Quindi non è richiesta la derivabilità negli estremi. In altre parole la tesi è vera anche per funzioni che non sono derivabili in a e/o in b.
Un esempio di funzione continua in un intervallo chiuso, derivabile nei punti interni ma non derivabile agli estremi è la

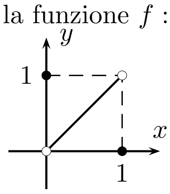
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$



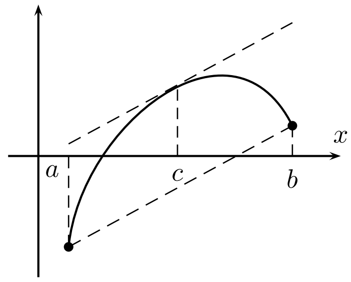
il cui grafico è la semicirconferenza, di centro l'origine e raggio 1, che sta nel primo e secondo quadrante

Osservazione Ricordando che la derivabilità implica la continuità, si potrebbe pensare che la derivabilità in (a, b) sia sufficiente a garantire la continuità in $[a, b]$. Questo è falso: la derivabilità in (a, b) garantisce certamente la continuità in (a, b), ma non la continuità anche agli estremi. Si consideri ad esempio la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

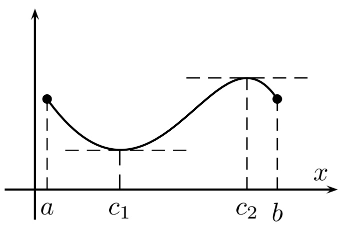
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Essa è derivabile e quindi continua in $(0, 1)$, ma non è continua agli estremi. Questo stesso esempio prova anche che non possiamo rinunciare alla continuità agli estremi dell'intervallo se vogliamo che la tesi del teorema di Lagrange sia vera. Infatti, con questa funzione si ha $f(b) - f(a) = f(1) - f(0) = -1$, mentre $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$.



Osservazione Sull'interpretazione geometrica del teorema del valor medio. Consideriamo l'identità contenuta nella tesi del teorema: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Possiamo intanto osservare che il quoziente è un rapporto incrementale, quello relativo a tutto l'intervallo $[a, b]$. Quindi, ricordando che la derivata in un punto ha il significato di pendenza della retta tangente al grafico e che il rapporto incrementale significa invece pendenza della retta passante per gli estremi, la tesi del teorema dice che c'è un punto c interno all'intervallo $[a, b]$ tale che la tangente al grafico nel punto corrispondente a c è parallela alla retta per gli estremi del grafico.

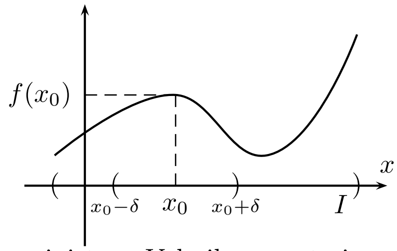


Osservazione Non è difficile capire che il teorema di Rolle è un caso particolare di quello di Lagrange. Infatti, se alle ipotesi del teorema di Lagrange aggiungiamo che $f(a) = f(b)$, allora la tesi del teorema del valor medio dice che c'è un punto c in cui $f'(c) = 0$, che è appunto la tesi del teroema di Rolle. E non è difficile dare anche a Rolle un significato geometrico: se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo (e se ovviamente soddisfa le ipotesi di continuità e derivabilità) allora c'è almeno un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui la retta tangente è orizzontale (nella figura qui a fianco ce ne sono due).

4 Studio del comportamento locale di una funzione

Come conseguenze del teorema di Lagrange si hanno alcuni importanti risultati che consentono di studiare il comportamento locale di una funzione, cioè le proprietà che la funzione ha in prossimità di alcuni punti del suo dominio.

Ma procediamo con ordine. Anzitutto richiamo un'importante definizione, già incontrata nella sezione sulle funzioni reali.



Definizione Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in I$. Ricordo che x_0 è un **punto di massimo locale** (risp. **punto di minimo locale**) di f, se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0, contenuto in I, tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad (\text{risp. } f(x_0) \leq f(x)) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ricordo anche che, se x_0 è un estremo di I, l'intorno può essere destro o sinistro. Vale il seguente importante risultato:

Proposizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Se f è derivabile in x_0 e x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per f *interno* ad I, allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazione Ci sono alcune cose da osservare. Senza l'ipotesi sulla derivabilità di f la tesi può non essere vera. In altre parole, la proposizione "in un punto di massimo o di minimo una funzione ha derivata nulla", senza l'ipotesi di derivabilità della funzione, è falsa. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = |x|$. Essa ha in 0 un punto di minimo ma in 0 la derivata non è nulla, dato che non esiste. Secondo: occorre dire "punto interno". Per convincersene basta pensare ad esempio alla funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = 1 - x$. Il primo estremo 0 è punto di massimo locale (anche globale in questo caso), ma la derivata non è zero (nemmeno la derivata destra è zero).

Osservazione La proposizione appena enunciata fornisce un metodo per la ricerca dei punti di massimo e di minimo di una funzione derivabile. Essa dice che tali punti vanno cercati tra quelli che annullano la derivata della funzione (detti solitamente *punti stazionari*). Attenzione che la proposizione *non* afferma che i punti stazionari sono punti di massimo o di minimo, dice il viceversa. Quindi, dopo aver trovato i punti stazionari, annullando la derivata, si dovrà stabilire se questi sono o no di massimo o di minimo (potrebbero non essere né di massimo né di minimo[6]).

Vediamo subito come si fa. Intanto abbiamo questi altri risultati:

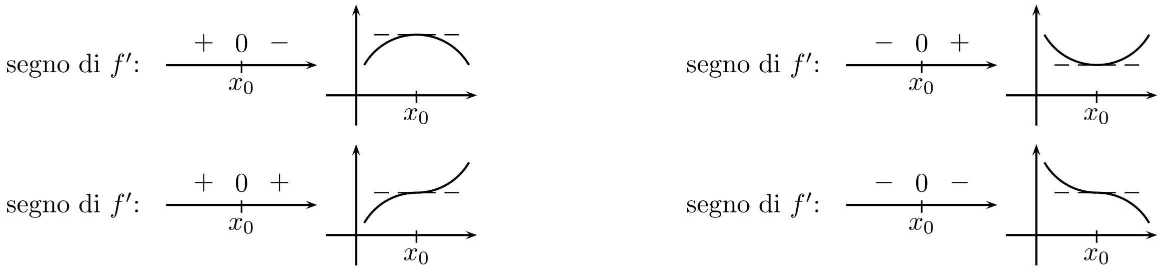
Proposizione Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$, con f derivabile in I. Valgono le proprietà seguenti:

- se $f' > 0$ in I, allora f è crescente in I; se $f' \geq 0$, allora f è non decrescente in I;
  (se $f' < 0$ in I, allora f è decrescente in I; se $f' \leq 0$, allora f è non crescente in I);
- se f' è identicamente nulla in I, allora f è costante in I.

[6]Si pensi alla funzione $f(x) = x^3$, che ha derivata nulla in zero ma è crescente e quindi non ha né massimi né minimi.

Osservazione Il primo di questi risultati fornisce un metodo molto potente e comodo per studiare la monotonia (cioè la crescenza o decrescenza) di una funzione (derivabile, naturalmente). È largamente utilizzato infatti nello *studio di funzione*. Il secondo risultato invece inverte la già nota proprietà che la derivata di una funzione costante è nulla.

Osservazione Abbiamo a questo punto tutti i risultati teorici che ci servono per studiare l'"andamento" di una funzione: il segno della derivata prima ci permette di dire in quali intervalli essa cresce e in quali decresce. Dove la derivata si annulla abbiamo punti stazionari, cioè punti dove la pendenza è zero. Per capire se questi sono punti di massimo o di minimo basterà vedere qual è il segno della derivata in prossimità: se la derivata è positiva a sinistra e negativa a destra del punto stazionario avremo un punto di massimo (locale), se invece la derivata è negativa a sinistra e positiva a destra avremo un punto di minimo (sempre locale). Può anche succedere che la derivata sia positiva (o negativa) sia a sinistra sia a destra del punto stazionario. In questi casi il punto stazionario non è né di massimo né di minimo locale. Riassumo il tutto in uno schema.



Quale applicazione di quanto appena detto, vediamo un semplice esempio di studio di funzione.

- Vogliamo studiare la funzione $f(x) = 4x^3 - x^4$.

  Cominciamo col dire che essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ (è un polinomio). Possiamo anche affermare subito che essa è continua e derivabile in tutto il suo dominio, essendo somma di funzioni continue e derivabili.

  Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio. Trattandosi di tutto $\mathbb{R}$, i limiti da studiare sono gli infiniti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

  Si può a questo punto studiare se la funzione si annulla per qualche valore di x, risolvendo l'equazione $f(x) = 0$.[7] Si ha

$$4x^3 - x^4 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x^3(4 - x) = 0$$

  e quindi la funzione si annulla in 0 e in 4.

  Possiamo ora studiare il segno della funzione. Si ha

$$4x^3 - x^4 > 0 \quad \text{se e solo se} \quad x^3(4 - x) > 0$$

  e si trova che questo è vero per $0 < x < 4$. La funzione è dunque positiva in $(0, 4)$ e quindi negativa in $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

  Studiamo allora l'andamento della funzione, cioè la monotonia, e cerchiamo se ci sono punti di massimo o di minimo locale. Calcoliamo intanto la derivata:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x).$$

  Ci sono due punti stazionari, 0 e 3. Per capire qual è la natura di questi punti, studiamo il segno della derivata. Si ha evidentemente

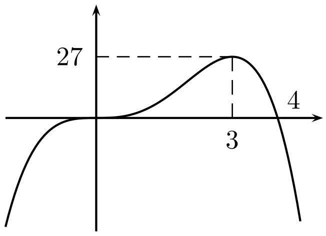
$$f(x) > 0 \quad \text{nell'insieme } (-\infty, 0) \cup (0, 3)$$

  e invece

$$f(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (3, +\infty).$$

  Pertanto possiamo affermare che la funzione è crescente in $(-\infty, 0)$, crescente in $(0, 3)$ e decrescente in $(3, +\infty)$. Quindi 3 è un punto di massimo locale, mentre 0 non è né di massimo né di minimo locale. Possiamo ora osservare che $f(0) = 0$ e $f(3) = 27$. Siamo ora in grado di tracciare un grafico sommario.

[7] In questo caso è facile trovare le soluzioni dell'equazione e poi della corrispondente disequazione, ma in generale la cosa può non essere per nulla agevole in quanto, come abbiamo detto, non esistono metodi del tutto generali per risolvere le equazioni.



Tra breve vedremo che ci sono altre proprietà analitiche che permettono di individuare altre proprietà geometriche delle funzioni.

Esercizio 4.1 Dire in quali sottoinsiemi dei rispettivi domini le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ (b) $f(x) = x + \ln(1 + x^2)$

(c) $f(x) = x - e^{x+1}$ (d) $f(x) = x + 1/x$

5 Il teorema di De l'Hôpital

Ecco ora un risultato molto utile nel calcolo dei limiti.

Teorema (di De l'Hôpital). Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili con $g'(x) \neq 0$ in (a, b).

- Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$, ed esiste il $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$
- se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} g(x)$ sono infiniti ed esiste il $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Come sempre analoghi risultati valgono per il limite da sinistra e per il limite bilatero. Il risultato vale anche se l'intervallo è illimitato e i limiti sono per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$.

Osservazione Il teorema di De l'Hôpital fornisce una regola molto comoda per calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞. Ribadisco che il teorema è applicabile solo in questi casi. Sostanzialmente il teorema dice che in presenza di tali limiti, se le funzioni sono derivabili, anziché calcolare il limite del quoziente si può cercare di calcolare il limite del quoziente delle derivate: se questo esiste, allora esso coincide con il limite cercato. Per la verità si noti che nell'enunciato c'è l'ipotesi che la derivata del denominatore non si annulli: anche se nei casi concreti che ci capiteranno questa ipotesi sarà sempre verificata, è bene non dimenticare questo aspetto. Dal punto di vista operativo del calcolo di un limite, se si presenta la possibilità di applicare il teorema di De l'Hôpital, il procedimento corretto sarebbe quello di calcolare *a parte* il limite del quoziente delle derivate e solo quando si è trovato quest'ultimo, concludere tornando al limite originario. È consuetudine invece continuare il calcolo del limite originario uguagliandolo al limite del quoziente delle derivate, senza ancora sapere se quest'ultimo esiste. Per indicare che si sta applicando il teorema di De l'Hôpital, e che quindi ci si muove nell'ambito delle sue ipotesi, si usa scrivere una H sul simbolo di uguaglianza tra i due limiti $\left(\overset{\mathrm{H}}{=} \right)$.

Osservazione Abbiamo detto che il teorema è applicabile alle forme indeterminate $0/0$ o ∞/∞. Può succedere che il limite non sia inizialmente di questa forma, ma che lo diventi dopo una semplice trasformazione. Negli esempi che seguono ci sono alcune situazioni di questo tipo.

Esempi

- I limiti notevoli nella forma $0/0$, visti in precedenza, si possono calcolare agevolmente con il teorema di De l'Hôpital. Consideriamone ad esempio uno e lo studente provi anche con gli altri:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{b\,(1+x)^{b-1}}{1} = b$$
(si noti che le ipotesi del Teorema sono soddisfatte).

- Calcoliamo il $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$. Osserviamo che anche qui le ipotesi del Teorema sono soddisfatte. Possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{e^x} = 1.$$ [8]

- Consideriamo il limite $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$, che abbiamo peraltro già calcolato con un cambio di variabile. Non è una f.i. prevista dal Teorema di De l'Hôpital, ma lo diventa se riscriviamo (come fatto anche con il cambio di variabile)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad \big(\text{ora f.i. } (-\infty)/(+\infty)\big).$$

  Siamo ora quindi nella seconda situazione prevista dal Teorema.
  Le ipotesi sono soddosfatte e possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

- Il teorema di De l'Hôpital può essere applicato ripetutamente. Si consideri il seguente esempio:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln^2 x.$$

  Anzitutto lo si scrive nella forma $(+\infty)/(+\infty)$ con $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{1/x^3}$. Ora si applica il teorema una prima volta.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{1/x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x \cdot 1/x}{-3/x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x}{-3/x^3}.$$

  è ancora una f.i. $(-\infty)/(-\infty)$. Si applica nuovamente il teorema.

$$\ldots \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2/x}{9/x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{9} = 0.$$

- Anche i limiti sul confronto tra potenze/logaritmi/esponenziali si risolvono immediatamente con il Teorema di De l'Hôpital. Si ha infatti

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

  e

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

- Si potrebbe a questo punto anche provare abbastanza facilmente che $x^n = o(e^x)$, per $x \to +\infty$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. Con n applicazioni successive del Teorema si arriva a dire che il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \quad \text{Si provi ad esempio con } \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^x}.$$

- Analogamente si può provare che $\ln x = o(x^{1/n})$ per $x \to +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, considerando il $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}}$. Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n} x^{1/n - 1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n}{x^{1/n}} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Osservazione Ci si può chiedere perché abbiamo considerato il limite di $\frac{\ln x}{x^{1/n}}$ e non più semplicemente di $\frac{\ln x}{x^n}$. In realtà non si voleva complicare inutilmente la vita allo studente, c'è un motivo più profondo. Sappiamo

[8] Il limite si poteva anche calcolare riconducendolo ai limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \right) = 1.$$

che $\ln x = o(x)$, per $x \to +\infty$ (lo abbiamo dimostrato poco fa applicando il Teorema di De l'Hôpital). Quindi a maggior ragione il $\ln x$ è trascurabile rispetto alle potenze x^n, con $n > 1$ (x è trascurabile rispetto ad x^n). Pertanto un confronto del tipo $\frac{\ln x}{x^n}$ non è più di tanto significativo. Invece è più interessante chiedersi se il logaritmo è trascurabile anche rispetto a potenze di x di esponente più basso, come ad esempio le potenze $x^{1/n}$.[9] Si noti che così, al crescere di n, possiamo far diventare l'esponente piccolo quanto vogliamo e ottenere quindi potenze sempre più deboli. Il risultato del limite è appunto che il logaritmo è trascurabile rispetto ad $x^{1/n}$, qualunque sia n.

- Non sempre l'applicazione ripetuta del teorema porta al risultato voluto. Si consideri il seguente esempio, molto istruttivo.

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x}.$$ [10]

Il limite è nella f.i. $0 \cdot (+\infty)$. Lo riscriviamo come

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} \quad \text{(ora f.i. } 0/0)$$

e applichiamo il teorema di De l'Hôpital. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{1/x}\cdot(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{e^{1/x}} \quad \text{(ancora f.i. } 0/0).$$

Non serve continuare ad applicare il teorema: la forma si complica sempre di più. Basta invece riscrivere il limite iniziale come

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} \quad \text{(f.i. } (+\infty)/(-\infty))$$

e applicare il teorema. Si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}\cdot 1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^-} (-e^{-1/x}) = -\infty.$$

Quindi forme equivalenti da un punto di vista algebrico possono non essere ugualmente indicate per l'applicazione del teorema di De l'Hôpital. Ovviamente a priori può non essere facile intuire quale sia la forma più opportuna, ma non c'è nulla di male nel provare una strada e poi eventualmente lasciarla se ci si accorge che da quella parte non si va lontani.

Esercizio 5.1 Calcolare i seguenti limiti con il teorema di De l'Hôpital, dopo aver osservato che il teorema è applicabile.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (xe^x)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (xe^{1/x})$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\ln(e+x)}{x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln^2(1+x)}$

6 Derivate successive

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo I e sia $f' : I \to \mathbb{R}$ la sua derivata. Se f' è a sua volta derivabile in I, possiamo indicare con f'' (o con $D^2 f$) la $D(f')$ e chiamarla *derivata seconda* di f in I.

Il discorso può continuare con la derivata terza, e così via. Quindi in generale possiamo dare la seguente

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Poniamo $D^0 f = f$ e, se $D^n f$ è derivabile, $D^{n+1} f = D(D^n f)$.

Quindi, con formula *ricorsiva*, la derivata $(n+1)$-esima viene definita come la derivata della derivata n-esima.

[9] Sappiamo già che questo è vero ma, se vi ricordate, non lo abbiamo mai dimostrato.
[10] Lo studente sa già calcolare questo limite con un cambio di variabile. Si provi per esercizio.

Esempio Abbiamo già ovviamente tutto quello che ci serve per calcolare, in un punto o in tutto un intervallo, la derivata seconda (e le successive) di una funzione. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \ln x$ in $(0, +\infty)$. Dato che $f'(x) = \frac{1}{x}$, avremo $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, e così via.

Siano I un intervallo e n un intero positivo. Abbiamo già visto che solitamente si indica con $\mathscr{C}(I)$ la classe di tutte le funzioni continue in I.

Definizione Si indica con $\mathscr{C}^n(I)$ la classe di tutte le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ che hanno derivata n-esima continua in I.[11] Si indica infine con $\mathscr{C}^\infty(I)$ la classe delle funzioni che sono infinitamente derivabili in I, cioè le funzioni che hanno derivata di qualunque ordine.

Osservazione Dato che l'esistenza della derivata prima implica la continuità, per lo stesso motivo l'esistenza della derivata seconda implica la continuità della derivata prima, l'esistenza della derivata terza implica la continuità della derivata seconda, e così via. Quindi, definendo la classe $\mathscr{C}^\infty(I)$ non occorre dire derivata di qualunque ordine continua, dato che la derivata di ordine $n + 1$ garantisce la continuità della derivata di ordine n, qualunque sia n.

È facile rendersi conto che le funzioni elementari, nei rispettivi domini, sono infinitamente derivabili, con l'unica eccezione della funzione potenza che, quando è definita in zero, può in qualche caso non essere derivabile in tale punto.[12]

La proposizione seguente illustra alcune proprietà di una funzione legate al segno della derivata seconda di questa in un punto.

Proposizione Sia I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Valgono le proprietà seguenti:

(i) se f è derivabile due volte in x_0 e $f''(x_0) > 0$, allora esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(il verso della disuguaglianza si inverte se $f''(x_0) < 0$);

(ii) se f è derivabile due volte in x_0, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale. Se invece $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

Osservazioni Il significato geometrico della (i) è che, se la derivata seconda di una funzione in un punto è positiva, allora la funzione, almeno in un intorno di tale punto, sta al di sopra della sua retta tangente in quel punto.

La (ii) fornisce un secondo metodo operativo per stabilire se un punto è di massimo o di minimo per una funzione (derivabile almeno due volte). È alternativo a quello già visto che permette di stabilire la natura di un punto stazionario attraverso lo studio del segno della derivata prima. Questo comporta il calcolo della derivata seconda, ma in compenso richiede soltanto il valore di questa nel punto e non in tutto un intorno.

L'annullarsi della derivata prima e anche della derivata seconda nel punto che si sta studiando in genere non consente di giungere ad una conclusione sulla natura del punto. C'è una versione più generale della (ii), che richiede il calcolo delle derivate successive alla seconda, ma non la vediamo.

Esempio Consideriamo la funzione $f(x) = x \ln x$ e studiamo la natura del punto $x_0 = 1/e$. Si ha

$$f'(x) = \ln x + 1 \qquad \text{e} \qquad f'(1/e) = 0.$$

Il punto $1/e$ è quindi un punto stazionario di f. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 1/x \qquad \text{e} \qquad f''(1/e) = e > 0.$$

Quindi, in base alla (ii), il punto $1/e$ è punto di minimo locale di f.

[11] Attenzione che in $\mathscr{C}^n(I)$ ci sono le funzioni che hanno derivata n-esima *continua*, non le funzioni che hanno derivata n-esima, cioè che sono derivabili n volte. Una funzione può avere derivata n-esima, ma può succedere che la derivata n-esima non sia continua: tale funzione non sta in $\mathscr{C}^n(I)$.

[12] Si pensi ad esempio a $f(x) = \sqrt{x}$, che non è derivabile in 0 da destra, o a $\sqrt[3]{x}$, che non è derivabile in 0. È chiaro che non tutte le potenze presentano problemi di derivabilità in zero: $f(x) = x^3$ è derivabile in 0 con derivata nulla.

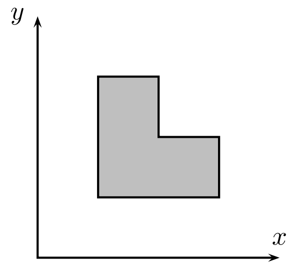
7 Funzioni convesse

Talvolta può essere interessante una proprietà geometrica di alcuni insiemi di $\mathbb{R}^2$ (o di $\mathbb{R}^3$ e in generale di $\mathbb{R}^n$) o di alcune funzioni: la *convessità*. Vediamo intanto le definizioni di tale proprietà.

Premetto che, dati due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ nel piano, indico con $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ il segmento (estremi inclusi) che li congiunge.

Definizione Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Diciamo che E è **convesso** se per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in E, il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ è contenuto in E.

Esempi Un cerchio in $\mathbb{R}^2$ è un insieme convesso. Anche un rettangolo è convesso.[13] Anche un qualunque poligono regolare (triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, ...) è convesso. Si osservi che non è significativo che il triangolo sia equilatero: qualunque triangolo è convesso.
L'insieme dei punti di una retta nel piano è convesso. L'insieme dei punti di una parabola invece no. Non è convesso l'insieme dei punti di una circonferenza (attenzione a non confondere circonferenza e cerchio). Non è convesso l'insieme dei punti esterni ad un cerchio (o ad un triangolo, quadrato, ...). Non è convesso l'insieme raffigurato qui a fianco.

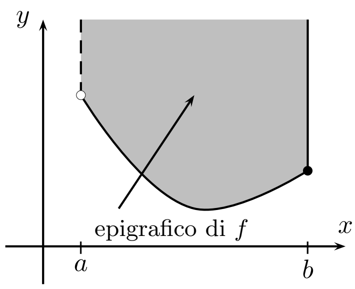


Ora vediamo quando una funzione è convessa. Definiamo prima un particolare insieme associato ad una funzione.

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. L'insieme

$$E_f = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geq f(x)\Big\}$$

si chiama *epigrafico* di f (è la parte di piano che sta sopra il grafico di f).



Esempio Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Il suo epigrafico è la regione di piano formata dalle soluzioni della disequazione $y \geq x^2$, cioè quello che nella prima parte del corso avremmo detto parte di piano che sta al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$, parabola inclusa. Si osservi che ogni retta verticale è in parte contenuta nell'epigrafico di f (questo succede se e solo se la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$).

Definizione Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **convessa** in I se il suo epigrafico è un insieme convesso.

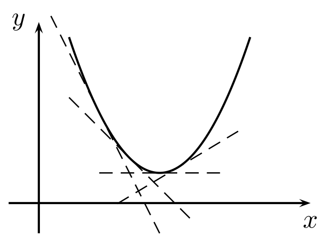
Una funzione si dice invece **concava** in I se $-f$ è convessa in I.

La convessità, per come l'abbiamo definita, nasce come un concetto tipicamente geometrico. La domanda può essere: ci sono legami tra la convessità e alcune proprietà analitiche della funzione? Potrebbe essere che lo studio di proprietà analitiche risulti più semplice di uno studio geometrico della convessità.

Sulle funzioni convesse si possono dimostrare moltissimi risultati, alcuni facilmente intuibili, altri molto più complessi e "nascosti". Senza voler entrare troppo nei dettagli, alcune proprietà intuibili sono ad esempio le due che descrivo qui, prima a parole. Pensiamo ad una funzione f derivabile (quindi ha senso parlare di derivata e di retta tangente).

(i) Si intuisce che la convessità di f ha forti legami con il fatto che il grafico di f sta sempre al di sopra di una qualunque retta tangente al grafico stesso.

(ii) Se pensiamo alla funzione derivata di f, cioè f', e se ricordiamo che il valore punto per punto della derivata è la "pendenza del grafico", ci si convince che la convessità è legata al fatto che la f' cresce (o meglio non decresce) al crescere di x. Il disegno qui a destra illustra entrambi gli aspetti.



Queste due proprietà sulle funzioni convesse ed un'altra proprietà che coinvolge la derivata seconda sono raccolte e formalizzate nella proposizione che segue.

Teorema (convessità e derivabilità) Supponiamo che I sia un intervallo aperto e che $f : I \to \mathbb{R}$ sia derivabile. Valgono le affermazioni seguenti:

[13] Attenzione a non credere che cerchio o rettangolo vogliano dire solo il bordo. Anche con i triangoli o i poligoni in genere è lo stesso. Essi comprendono anche la parte interna al contorno che disegniamo.

(i) f è convessa se e solo se per ogni $x_0 \in I$ fissato, la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è vera per ogni $x \in I$;

(ii) f è convessa se e solo se f' è non decrescente in I;

(iii) se f è derivabile *due volte*, allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Osservazione Nella (i) la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ esprime ovviamente il fatto geometrico che la funzione è al di sopra della retta tangente in ogni punto. Conseguenza della (iii) e della definizione di concavità è che una f è concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$. Nello studio di funzione la (iii) ha importanti applicazioni: negli intervalli in cui la derivata seconda è maggiore o uguale a zero possiamo dire che la funzione è convessa, negli intervalli in cui la derivata seconda è minore o uguale a zero possiamo dire che la funzione è concava.

Esempio Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$. Si tratta di un polinomio, quindi di una funzione continua e derivabile almeno due volte in tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \qquad \text{e} \qquad f''(x) = 6x - 6.$$

Dato che $f''(x) \geq 0$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ e $f''(x) \leq 0$ nell'intervallo $(-\infty, 1]$, possiamo dire che f è concava in $(-\infty, 1]$ e convessa in $[1, +\infty)$. Il punto in cui la derivata seconda si annulla e cambia la concavità di una funzione f, in questo esempio $x = 1$, si chiama *punto di flesso* di f.

Osservazione Si osservi che quindi, come il segno della derivata prima di una f è in relazione con la monotonia (crescenza o decrescenza) di f, così il segno della derivata seconda è in relazione con la convessità o concavità di f.

Vediamo, per finire, un esempio di studio di funzione completo, in cui utilizziamo tutti gli strumenti analitici visti.

Studiamo la funzione $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Essa è definita nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$. Possiamo affermare che essa è continua e derivabile (è $\mathscr{C}^\infty$) in tutto il suo dominio, essendo prodotto di funzioni derivabili in tale intervallo. Si noti che la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ non è derivabile in 0 da destra, pur essendo definita in 0. Ma la nostra funzione $x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ non è definita in 0.

La funzione f assume valori positivi nell'intervallo $(1, +\infty)$ e valori negativi in $(0, 1)$; assume il valore zero in $x = 1$.

Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio. Trattandosi dell'intervallo $(0, +\infty)$, i limiti da studiare sono per $x \to 0^+$ e all'infinito.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \;^{14} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo e studiamo la derivata prima:

$$f'(x) = D(x^{1/2} \ln x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \ln x + x^{1/2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} (\ln x + 2) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

La derivata si annulla per $\ln x + 2 = 0$, cioè per $x = e^{-2}$. La derivata è positiva in $(e^{-2}, +\infty)$ e negativa in $(0, e^{-2})$: quindi la funzione è decrescente in $(0, e^{-2})$ e crescente in $(e^{-2}, +\infty)$.

Il punto $x = e^{-2}$ è quindi punto di minimo locale; inoltre $f(e^{-2}) = -2e^{-1}$.

Per poter tracciare un grafico più accurato possiamo ancora calcolare il limite della derivata per $x \to 0^+$ (ci consente di capire con che pendenza la funzione tende a zero):[15]

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = -\infty.$$

Il grafico della funzione è quindi tangente all'asse negativo delle ordinate.

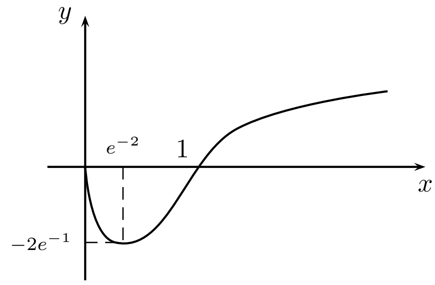
Ora possiamo calcolare e studiare la derivata seconda per avere informazioni sulla convessità/concavità della funzione. Si ha

[14] Possiamo arrivare al risultato ad esempio con il cambio di variabile $1/\sqrt{x} = t$ (da cui $x = \frac{1}{t^2}$):

$$\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1/t^2)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln t^2}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-2 \ln t}{t} = 0 \text{ (confronto standard).}$$

[15] Se una funzione è derivabile in x_0 da destra, la sua derivata destra ci dice con che pendenza la funzione "esce dal punto" $(x_0, f(x_0))$. Se non è derivabile in x_0, il limite della derivata (da destra e da sinistra) ci può dare la stessa informazione.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= D\left[\frac{1}{2}x^{-1/2}(\ln x+2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}(\ln x+2)+\frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{4}x^{-3/2}(\ln x+2)+\frac{1}{2}x^{-3/2} \\
&= -\frac{1}{4}x^{-3/2}(\ln x+2-2) \\
&= -\frac{1}{4}x^{-3/2}\ln x = -\frac{\ln x}{4\sqrt{x^3}}.
\end{aligned}
$$



La derivata seconda di f è positiva nell'intervallo $(0,1)$, negativa in $(1,+\infty)$ e si annulla in 1: quindi f è convessa in $(0,1)$ e concava in $(1,+\infty)$. Il punto 1 è punto di flesso. Il grafico è disegnato qui sopra.

8 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

(a) $f(x)=\ln^2 x$, con $x_0=e$. Il rapporto incrementale, nella "forma in x" e nella "forma in h" è

$$\frac{\ln^2 x-1}{x-e} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\ln^2(e+h)-1}{h}.$$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, con $x_0=1$. Il rapporto incrementale, nelle due forme, è

$$\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}.$$

(c) $f(x)=\begin{cases} x\ln(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, con $x_0=0$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{x\ln(\frac{1}{x})-0}{x}=\ln\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \frac{h\ln(\frac{1}{h})-0}{h}=\ln\left(\frac{1}{h}\right).$$ [16]

(d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ e^x & x>1 \end{cases}$, con $x_0=1$. Qui abbiamo due diversi rapporti incrementali, uno a destra e uno a sinistra. A sinistra si ha

$$\frac{x^2-1}{x-1} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{(1+h)^2-1}{h}.$$

A destra si ha invece

$$\frac{e^x-1}{x-1} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{e^{1+h}-1}{h}.$$

Attenzione nel secondo a non cadere nell'errore di scrivere $(e^x-e)/(x-1)$. Il valore della funzione nel punto iniziale, cioè $f(x_0)$, non cambia passando da destra a sinistra.

[16] Si noti che quando il punto iniziale è $x_0=0$ la forma in x e la forma in h sono ovviamente identiche, a meno di un banale cambio nel nome della variabile.

Esercizio 2.1

(a) $D(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

(b) $D\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right) = \dfrac{(-1)(1+x^2) - (1-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$.

(c) $D\big(x\sqrt{1+x^2}\big) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

(d) $D\big(\ln(x+e^x)\big) = \dfrac{1+e^x}{x+e^x}$.

(e) $D\big((x^2+e^x)^2\big) = 2(x^2+e^x)(2x+e^x)$.

(f) $D\big(\sqrt{x^2 \ln x}\big) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 \ln x}}\left(2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}\right)$.

(g) Questa è più lunga:

$$D\left(\frac{x+e^{2x}}{x+\ln(2x)}\right) = \frac{(1+2e^{2x})(x+\ln(2x)) - (x+e^{2x})(1+1/x)}{(x+\ln(2x))^2}.$$

(h) $D\big(\ln^2(x+\ln x)\big) = 2\ln(x+\ln x) \cdot \dfrac{1}{x+\ln x} \cdot (1+1/x)$.

(i) $D\left(\dfrac{1}{x+e^{-x}}\right) = -\dfrac{1}{(x+e^{-x})^2}(1-e^{-x})$.

(j) $D\big(\ln(x \ln x)\big) = \dfrac{1}{x \ln x}(\ln x + 1)$.

Esercizio 2.2

Ricordo che l'equazione della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(a) $f(x) = x + \ln x$, con $x_0 = 1$. La derivata è $f'(x) = 1 + 1/x$ e quindi $f'(x_0) = 2$. Pertanto l'equazione della retta tangente è
$$y = 1 + 2(x-1).$$

(b) $f(x) = xe^x$, con $x_0 = 1$. La derivata è $f'(x) = e^x + xe^x$ e quindi $f'(x_0) = 2e$. Pertanto l'equazione della retta tangente è
$$y = e + 2e(x-1).$$

(c) $f(x) = x + \sqrt{x}$, con $x_0 = 4$. La derivata è $f'(x) = 1 + 1/(2\sqrt{x})$ e quindi $f'(x_0) = 5/4$. Pertanto l'equazione della retta tangente è
$$y = 6 + 5(x-4)/4.$$

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, con $x_0 = 1/2$. La derivata è $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ e quindi $f'(x_0) = -1/\sqrt{3}$. Pertanto l'equazione della retta tangente è
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1/2).$$

Esercizio 4.1

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile (è un polinomio). La derivata è

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

Studiando la positività della derivata si trova che la funzione f è crescente in $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ e decrescente in $[1, 3]$. Quindi ha in 1 un punto di massimo e in 3 un punto di minimo (in 1 e in 3 la derivata si annulla).

(b) $f(x) = x + \ln(1 + x^2)$.

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile perché somma di funzioni derivabili. La derivata è

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 + 2x}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}.$$

La derivata si annulla in -1 ed è positiva per tutti gli altri valori reali. Quindi la funzione f è crescente in tutto $\mathbb{R}$ e ha in -1 un punto stazionario (che non è ovviamente né di massimo né di minimo).

(c) $f(x) = x - e^{x+1}$.

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile perché somma di funzioni derivabili. La derivata è

$$f'(x) = 1 - e^{x+1}.$$

La derivata si annulla in -1 ed è positiva per tutti i valori minori di -1. Quindi la funzione f è crescente in $(-\infty, -1]$, decrescente in $[-1, +\infty)$ e ha in -1 un punto di massimo.

(d) $f(x) = x + 1/x$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ad esclusione di 0; è derivabile nel suo dominio. La derivata è

$$f'(x) = 1 - 1/x^2.$$

La derivata si annulla in $x = \pm 1$ ed è positiva per $x < -1$ oppure per $x > 1$. Quindi la funzione f è crescente in $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e decrescente in $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Ha quindi un punto di massimo in -1 e un punto di minimo in 1.

Esercizio 5.1

In tutti lascio allo studente il compito di verificare anzitutto che il teorema di De l'Hôpital è applicabile (si ricordi che lo è con le forme indeterminate del tipo ∞/∞ o $0/0$).

(a) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot 1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Ora si possono utilizzare i noti risultati sul confronto tra un logaritmo e una potenza, oppure procedere ancora con De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2e^{x^2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4xe^{x^2}} = 0.$$

(c) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}} \cdot 1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} \cdot 1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{\sqrt{x}}} = 0.$$

(d) Questo è un curioso esempio in cui il comodo metodo di De l'Hôpital non funziona, cioè non permette di arrivare ad una risposta. Infatti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x/(2\sqrt{1+x^2})}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e si intuisce che derivando un'altra volta si torna al punto di partenza. Non funziona nemmeno l'espediente (che avete visto in un esempio della lezione) di scrivere

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{1+x^2}}$$

e provare a derivare (così si complica sempre di più, provate). Il limite occorre calcolarlo in un altro modo, che peraltro già conoscete. Portando sotto radice la x a denominatore (attenzione al segno!) si ha semplicemente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right) = -1.$$

(e) Il limite proposto è nella f.i. $-\infty \cdot 0$. Per applicare De l'Hôpital occorre prima trasformarlo.

$$\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

(f) Lo studente attento avrà riconosciuto uno dei limiti notevoli (il limite vale α). Anche se non precisato nel testo, osserviamo che α può essere un qualunque numero reale e che è ragionevole sia $\alpha \neq 1$, altrimenti il limite è banalmente 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

(g) Il limite è nella f.i. $+\infty \cdot 0$. Per applicare De l'Hôpital occorre prima trasformarlo.

$$\lim_{x\to+\infty} (x\ln(1+1/x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}.$$

Qui sarebbe più invitante un cambio di variabile ($1/x = t$). Procediamo comunque con De l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(1+1/x)\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1.$$

(h) La forma è $0 \cdot \infty$ e occorre trasformarlo.

$$\lim_{x\to 0^+} (xe^{1/x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

Da notare che se avessimo scritto

$$\lim_{x\to 0^+} (xe^{1/x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}}$$

con De l'Hôpital il limite si sarebbe complicato (provare).

Da notare anche che per $x \to 0^-$ non è invece una forma indeterminata e il limite è 0.

(i) Forma 0/0. Con De l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}\cdot 2/x^3}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3},$$

ma il limite così si complica. Proviamo allora prima a trasformarlo con

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1/x^2}{e^{1/x^2}\cdot(-2/x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

(j) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-x^{1/2}}{x^{1/3}} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

Ora, dato che le potenze sono degli infiniti, possiamo trascurare la costante 1 a numeratore e considerare il

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+} x^{1/6} = 0.$$

(k) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\ln(e+x)}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{e+x}}{1} = -\frac{1}{e}.$$

(l) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln^2(1+x)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}}.$$

Il fattore $\frac{1}{1+x}$ tende a 1 e possiamo considerare

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)} \stackrel{\text{H}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1/(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

A Appendice – Studio di funzione

In questa appendice presento alcuni esempi di studio di funzione. Studiamo le seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^2(x+1)(x-2)$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$
3. $f(x) = x \ln x$
4. $f(x) = x^3 \ln x^2$
5. $f(x) = x^3 e^x$
6. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
9. $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$
10. $f(x) = x^2 - \ln x$

▶ 1. Studiamo la funzione $f(x) = x^2(x+1)(x-2) = x^4 - x^3 - 2x^2$.
La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, essendo un polinomio. Possiamo anche affermare subito che essa è continua e derivabile in tutto il suo dominio, essendo somma di funzioni continue e derivabili.
La funzione si annulla per $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Possiamo ora studiare il segno della funzione. Si ha

$$x^2(x+1)(x-2) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad (x+1)(x-2) > 0 \quad \text{cioè per } x < -1 \text{ oppure } x > 2.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $-1 < x < 2$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio. Trattandosi di tutto $\mathbb{R}$, dobbiamo calcolare i limiti agli infiniti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$ [17]

Studiamo ora l'andamento della funzione, cioè troviamo dove la funzione cresce e dove decresce, e cerchiamo se ci sono punti di massimo o di minimo locale. Calcoliamo quindi la derivata:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x = x(4x^2 - 3x - 4).$$

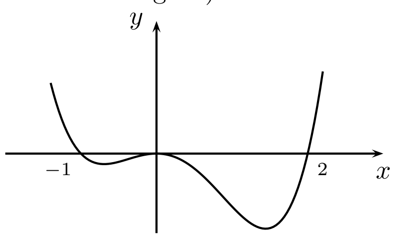
Ci sono punti stazionari, punti cioè in cui la derivata si annulla. Sono 0 e $\frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$.[18] Per capire qual è la natura di questi punti, studiamo il segno della derivata. Studiando il segno dei due fattori, si trova che

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'insieme } \left(\tfrac{3-\sqrt{73}}{8}, 0\right) \cup \left(\tfrac{3+\sqrt{73}}{8}, +\infty\right)$$

e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'insieme } \left(-\infty, \tfrac{3-\sqrt{73}}{8}\right) \cup \left(0, \tfrac{3+\sqrt{73}}{8}\right).$$

Pertanto possiamo concludere che la funzione è decrescente in $(-\infty, \frac{3-\sqrt{73}}{8})$, crescente in $(\frac{3-\sqrt{73}}{8}, 0)$, decrescente in $(0, \frac{3+\sqrt{73}}{8})$ e ancora crescente in $(\frac{3+\sqrt{73}}{8}, +\infty)$. Inoltre possiamo affermare che il punto $\frac{3-\sqrt{73}}{8}$ è punto di minimo locale, il punto 0 è di massimo locale e il punto $\frac{3+\sqrt{73}}{8}$ è di minimo locale. Per ottenere un grafico abbastanza preciso in questo caso conviene calcolare il valore della funzione nei punti di massimo e di minimo (in quelli di minimo è meglio accontentarsi di un valore approssimato): si ha $f(\frac{3-\sqrt{73}}{8}) \approx -0.39$ e $f(\frac{3+\sqrt{73}}{8}) \approx -2.83$. In 0 la funzione vale ovviamente 0. Possiamo allora disegnare un grafico sommario (non riporto sul grafico l'indicazione dei punti di massimo e minimo per non pasticciare inutilmente la figura).



[17] I risultati si ottengono considerando che le potenze terza e seconda sono trascurabili rispetto alla potenza quarta, per $x \to +\infty$.
[18] Valori approssimati di questi ultimi due sono $\frac{3-\sqrt{73}}{8} \approx -0.69$ e $\frac{3+\sqrt{73}}{8} \approx 1.44$.

Dal grafico appare evidente che il punto $\frac{3+\sqrt{73}}{8}$ è in realtà punto di minimo globale per la funzione. La funzione non è invece limitata superiormente.
Per completare lo studio possiamo calcolare e studiare la derivata seconda (il grafico dice che devono esserci dei punti di flesso). Si ha

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 4.$$

La derivata seconda si annulla in $\frac{3\pm\sqrt{57}}{12}$. Lo studio del segno di f'' porta a dire che

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } x < \tfrac{3-\sqrt{57}}{12} \text{ e per } x > \tfrac{3+\sqrt{57}}{12}$$

e invece

$$f''(x) < 0 \quad \text{per } \tfrac{3-\sqrt{57}}{12} < x < \tfrac{3+\sqrt{57}}{12}.$$

Quindi la funzione f è convessa per $x < \frac{3-\sqrt{57}}{12}$, concava per $\frac{3-\sqrt{57}}{12} < x < \frac{3+\sqrt{57}}{12}$ e ancora convessa per $x > \frac{3+\sqrt{57}}{12}$. Possiamo concludere anche che $\frac{3-\sqrt{57}}{12}$ e $\frac{3+\sqrt{57}}{12}$ sono punti di flesso.[19]

▶ 2. Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$.
La funzione è definita in tutti i punti diversi da -1, dove si annulla il denominatore. Dove è definita è continua e derivabile.
La funzione si annulla in $x = 0$. Possiamo studiare il segno della funzione, studiando il segno di numeratore e denominatore. Risulta

$$\frac{x}{x^3+1} > 0 \quad \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 0.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $-1 < x < 0$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè in -1 e agli infiniti. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0$$ [20]

e

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x}{x^3+1} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x}{x^3+1} = +\infty.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = \frac{x^3+1-x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

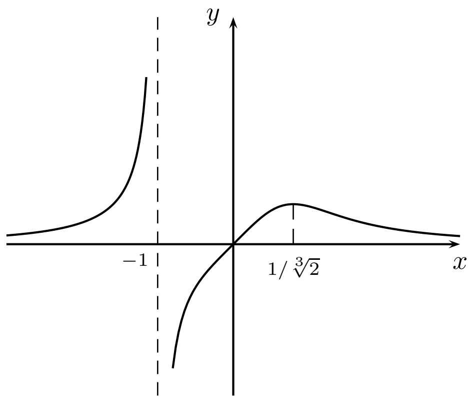
La derivata si annulla in $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, che è quindi un punto stazionario.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'insieme } (-\infty,-1) \cup (-1, \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}})$$

e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty).$$

Pertanto possiamo dire che la funzione è crescente in $(-\infty,-1)$, cresente in $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ e decrescente in $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$. Inoltre il punto $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è punto di massimo locale. Possiamo disegnare un grafico sommario.



La funzione non è limitata, né inferiormente né superiormente. Non facciamo lo studio della derivata seconda.[21]

[19] Valori approssimati dei due punti di flesso sono $\frac{3-\sqrt{57}}{12} \approx -0.37$ e $\frac{3+\sqrt{57}}{12} \approx 0.88$, che sono coerenti con la posizione dei punti di massimo e di minimo.
[20] Il risultato segue osservando che il numeratore è trascurabile rispetto al denominatore.
[21] Lo studio porterebbe a concludere che la derivata seconda si annulla in $x = 0$ e in $x = \sqrt[3]{2}$. Solo il secondo è punto di flesso.

▶ 3. Studiamo la funzione $f(x) = x \ln x$.
La funzione è definita sulle x positive, cioè sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dove è definita è continua e derivabile.
La funzione si annulla in $x = 1$. Studiamo il segno della funzione. Risulta

$$x \ln x > 0 \quad \text{se } x > 1.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $0 < x < 1$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè in 0 da destra e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$ [22]

e

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

La derivata si annulla in $\frac{1}{e}$, che è quindi un punto stazionario.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'intervallo } (\tfrac{1}{e}, +\infty)$$

e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (0, \tfrac{1}{e}).$$

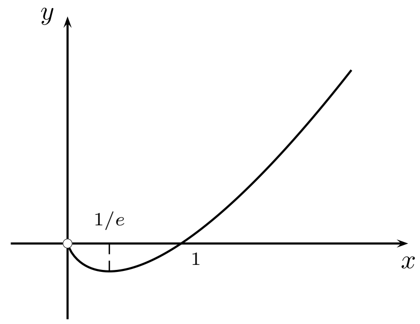
Pertanto possiamo dire che la funzione è decrescente in $(0, \frac{1}{e})$ e crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Inoltre il punto $\frac{1}{e}$ è punto di minimo locale.
Possiamo disegnare un grafico sommario. Per ottenere un grafico più accurato in prossimità dell'origine, possiamo calcolare la pendenza da destra (cioè la derivata destra in 0). Dato però che la funzione non è definita in 0, anziché la derivata destra con la definizione, possiamo fare il limite da destra della derivata. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty.$$

Questo significa che la funzione, nell'origine, da destra, è tangente all'asse verticale.
Non è difficile studiare la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

che è ovviamente sempre positiva in $(0, +\infty)$. Quindi la funzione è convessa. Ecco un grafico sommario.



A conclusione possiamo osservare che $\frac{1}{e}$ è punto di minimo globale e che la funzione non è limitata superiormente.

[22] Il limite è già stato calcolato in altre occasioni. Un modo è il seguente:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0.$$

▶ 4. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 \ln x^2$.
La funzione è definita sulle x diverse da zero, cioè sull'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dove è definita è continua e derivabile.
Qui possiamo osservare una cosa importante: il dominio è simmetrico rispetto all'origine e la funzione è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine.[23] La possiamo allora studiare intanto sull'intervallo $(0, +\infty)$.[24]
La funzione si annulla in $x = 1$. Studiamo il segno della funzione. Risulta

$$x^3 \ln x^2 > 0 \quad \text{se } x > 1.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $0 < x < 1$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi dell'intervallo $(0, +\infty)$, cioè in 0 da destra e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x^2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x^2}{1/x^3}.$$

Con il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$ (da cui $x = 1/y$) si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x^2}{1/x^3} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(1/y^2)}{y^3} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-2 \ln y}{y^3} = 0.$$

Poi

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \ln x^2 = +\infty.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \ln x^2 + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 3x^2 \ln x^2 + 2x^2 = x^2(3 \ln x^2 + 2).$$

La derivata si annulla se $3 \ln x^2 + 2 = 0$, cioè se $\ln x^2 = -\frac{2}{3}$, cioè se $x^2 = e^{-2/3}$, cioè se $x = e^{-1/3}$, che è quindi un punto stazionario.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'intervallo } (e^{-1/3}, +\infty)$$

e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (0, e^{-1/3}).$$

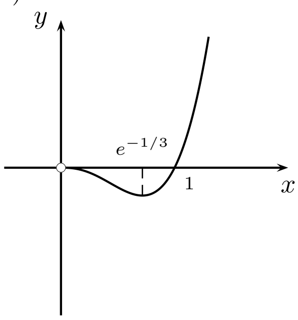
Pertanto possiamo dire che la funzione è decrescente in $(0, e^{-1/3})$ e crescente in $(e^{-1/3}, +\infty)$. Inoltre il punto $e^{-1/3}$ è punto di minimo locale.
Come fatto nell'esercizio precedente, per ottenere un grafico più accurato in prossimità dell'origine, possiamo calcolare la pendenza da destra. Facciamo anche qui il limite da destra della derivata, cioè

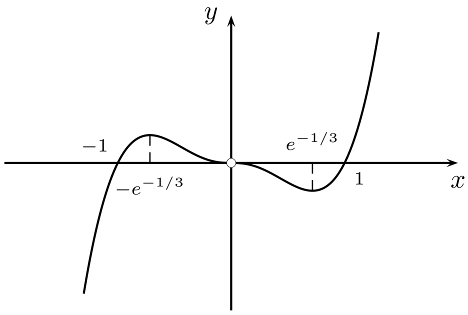
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2(3 \ln x^2 + 2) = 0.$$[25]

Questo significa che questa volta la funzione, nell'origine, da destra, è tangente all'asse orizzontale.
Non è difficile studiare la derivata seconda. Si trova che

$$f''(x) = 2x(3 \ln x^2 + 5),$$

da cui segue che c'è un punto di flesso in $e^{-5/6}$ (cioè prima del punto di minimo, come deve necessariamente essere).
Ecco un grafico sommario (a sinistra quello su $(0, +\infty)$ e a destra quello su tutto il dominio, ottenuto ricordando che la funzione è dispari).





[23] Si ha infatti che $f(-x) = (-x)^3 \ln(-x)^2 = -x^3 \ln x^2 = -f(x)$.
[24] Si potrebbe osservare anche che la funzione coincide con $2x^3 \ln x$, ma mettiamo di non accorgerci di questo.
[25] È chiaro che basta fare il limite di $x^2 \ln x^2$, che però con il cambio di variabile $x^2 = y$ diventa il $\lim_{y \to 0^+} y \ln y$, che abbiamo già calcolato prima e che risulta uguale a 0.

► 5. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 e^x$.
Il dominio è tutto $\mathbb{R}$. La funzione non ha simmetrie,[26] pur essendo il dominio simmetrico rispetto all'origine. La funzione è continua e derivabile.
La funzione si annulla in $x = 0$. Il segno della funzione è immediato. Risulta

$$x^3 e^x > 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $x < 0$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè agli infiniti. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 e^x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(-y)^3}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-y^3}{e^y} = 0.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

La derivata si annulla in $x = -3$ e in $x = 0$, che sono quindi punti stazionari.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'insieme } (-3, 0) \cup (0, +\infty)$$

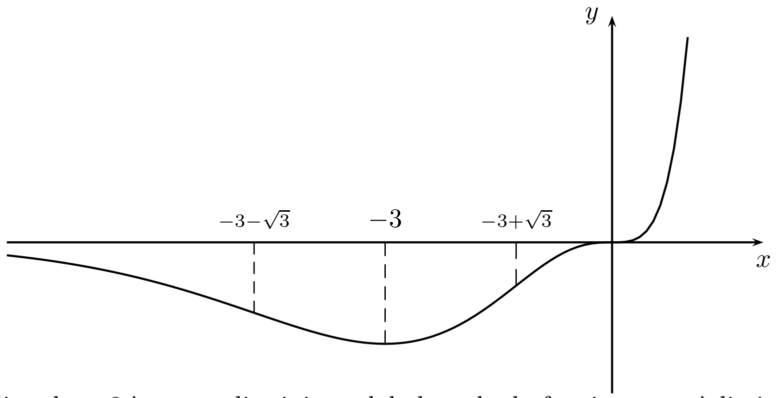
e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (-\infty, -3).$$

Pertanto possiamo dire che la funzione è decrescente in $(-\infty, -3)$ e crescente in $(-3, +\infty)$. Inoltre il punto -3 è punto di minimo locale. Da osservare anche che 0, pur essendo un punto stazionario, non è né di massimo né di minimo.[27]
Anche qui non è difficile studiare la derivata seconda. Si trova che

$$f''(x) = x e^x (x^2 + 6x + 6),$$

da cui segue che ci sono due punti di flesso: in $-3 - \sqrt{3}$ e in $-3 + \sqrt{3}$ (entrambi negativi) e che la funzione è concava in $(-\infty, -3 - \sqrt{3})$, convessa in $(-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$, concava in $(-3 + \sqrt{3}, 0)$ e infine ancora convessa in $(0, +\infty)$.
Ecco un grafico sommario.



A conclusione possiamo dire che -3 è punto di minimo globale e che la funzione non è limitata superiormente.

[26] Infatti $f(-x) = (-x)^3 e^{-x} = -x^3 e^{-x}$ non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$, a causa della non simmetria della funzione esponenziale.
[27] Non è né di massimo né di minimo poiché la funzione è crescente sia a sinistra sia a destra di 0. Si può dire che 0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

▶ 6. Studiamo la funzione $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.
Il dominio è tutto $\mathbb{R}$. La funzione ha questa volta simmetria ed è in particolare una funzione pari.[28] La possiamo studiare nell'intervallo $[0, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile.
La funzione si annulla in $x = 0$. Il segno della funzione è immediato. Risulta

$$x^2 e^{-x^2} > 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè all'infinito. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2).$$

La derivata si annulla in $x = 0$ e in $x = 1$, che sono quindi punti stazionari. Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'intervallo } (0, 1)$$

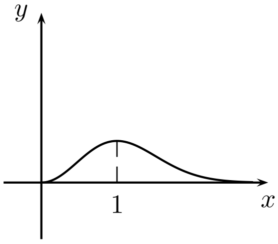
e invece

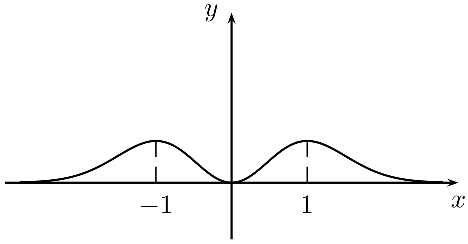
$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (1, +\infty).$$

Pertanto possiamo dire che la funzione è crescente in $(0, 1)$ e decrescente in $(1, +\infty)$. Inoltre il punto 1 è punto di masimo locale. La natura del punto 0 sarà chiara quando faremo il grafico su tutto $\mathbb{R}$.
Qui ci sono un po' di calcoli per studiare la derivata seconda, ma non è difficile. Si trova che

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1),$$

da cui segue che ci sono due punti di flesso, e sono le soluzioni positive dell'equazione $x^2 = \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$.[29]
Ecco un grafico sommario (a sinistra quello su $[0, +\infty)$ e a destra quello su tutto il dominio, ottenuto ricordando che la funzione è pari).





Dal grafico risulta che la funzione ha in -1 e 1 punti di massimo globali e in 0 il punto di minimo globale.

[28] Infatti $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$.

[29] Valori approssimati di questi sono $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^{1/2} \approx 0.47$ e $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)^{1/2} \approx 1.51$. Stanno naturalmente uno a sinistra e uno a destra del punto di massimo.

▶ 7. Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

La funzione è definita sulle x positive, cioè sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dove è definita è continua e derivabile.
La funzione si annulla in $x = 1$. Studiamo il segno della funzione. Risulta

$$\frac{\ln x}{x} > 0 \quad \text{se } x > 1.$$

Ovviamente la funzione è invece negativa per $0 < x < 1$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè in 0 da destra e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

La derivata si annulla in e, che è quindi un punto stazionario.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'intervallo } (0, e)$$

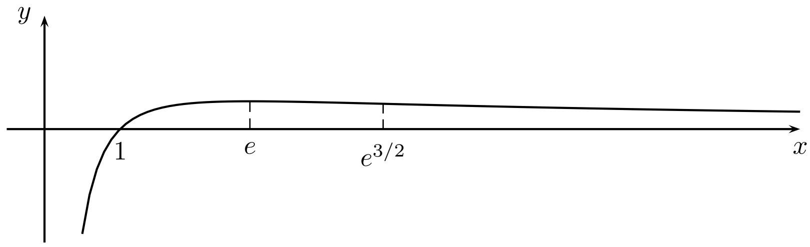
e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (e, +\infty).$$

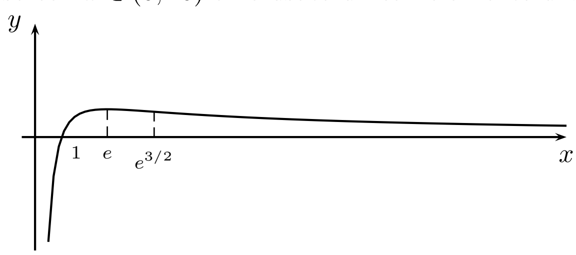
Pertanto possiamo dire che la funzione è crescente in $(0, e)$ e decrescente in $(e, +\infty)$. Inoltre il punto e è punto di massimo locale.
Non è difficile studiare la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

La derivata seconda si annulla in $e^{3/2}$. La funzione è concava in $(0, e^{3/2})$ e convessa in $(e^{3/2}, +\infty)$. Il punto $e^{3/2}$ è un punto di flesso.
Ecco un grafico sommario.



Il grafico è stato ottenuto, come tutti gli altri, con un software che consente di riportare esattamente i valori assunti dalla funzione (qui ad esempio ho disegnato la funzione per valori di x compresi tra 0 e 10). A volte può succedere che il grafico "reale", cioè quello che si ottiene senza cambiamenti di scala sugli assi, non dica in modo così esplicito quello che si è trovato con lo studio analitico. In questo caso non ho utilizzato cambiamenti di scala sugli assi, quindi il grafico è esattamente così. Possiamo notare che i punti di massimo e di flesso sono poco evidenti e che soprattutto la funzione decresce molto lentamente, per $x \to +\infty$, cosa che non era così facilmente intuibile.
Il grafico qui sotto è invece lo stesso con $x \in (0, 20)$ e ho usato un cambiamento di scala sulle x.



Il punto di massimo è un po' più evidente, e forse anche il punto di flesso.

► 8. Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
La funzione è definita sulle x diverse da zero, cioè sull'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dove è definita è continua e derivabile.
Qui possiamo osservare che il dominio è simmetrico rispetto all'origine e la funzione è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine. La possiamo allora studiare intanto sull'intervallo $(0, +\infty)$.
La funzione non si annulla per nessun valore di x. Il segno della funzione è immediato. Risulta

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} > 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Calcoliamo ora i limiti agli estremi dell'intervallo $(0, +\infty)$, cioè in 0 da destra e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = +\infty$$

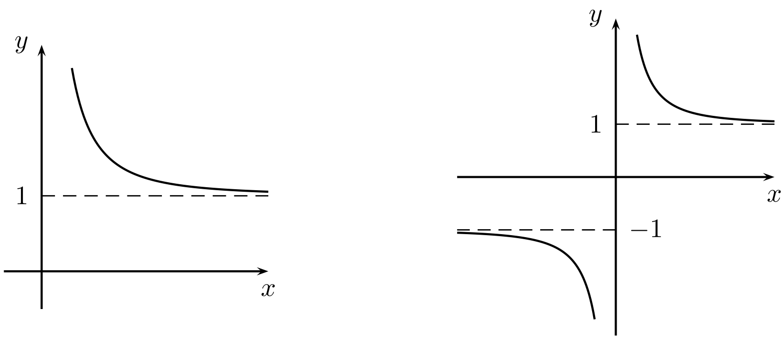
e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$[30]

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

La derivata non si annulla mai, e quindi non vi sono punti stazionari e nemmeno punti di massimo o di minimo locale. Ovviamente il segno della derivata è negativo in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$, e cioè la funzione è decrescente in tale intervallo.
Ecco un grafico sommario (a sinistra quello su $(0, +\infty)$ e a destra quello su tutto il dominio, ottenuto ricordando che la funzione è dispari).



La funzione non è limitata né inferiormente né superiormente. Non studiamo la derivata seconda.

[30] A numeratore 1 è trascurabile e il tutto è equivalente a $\sqrt{x^2}$, cioè x. In questi casi (limite finito all'infinito) si dice che la funzione ha un asintoto orizzontale, qui dato dalla retta di equazione $y = 1$.

► 9. Studiamo la funzione $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.
La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. È continua e derivabile.
Questa volta, anche se il dominio è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non ha simmetrie.
La funzione non si annulla per nessun valore di x: infatti l'equazione

$$x = \sqrt{x^2+1}$$

non ha soluzioni.[31] Risulta inoltre sempre vero che

$$x < \sqrt{x^2+1}$$ [32]

e quindi la funzione assume valori negativi in tutto $\mathbb{R}$.
Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio, cioè agli infiniti. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}(x - \sqrt{x^2+1}) = -\infty$$

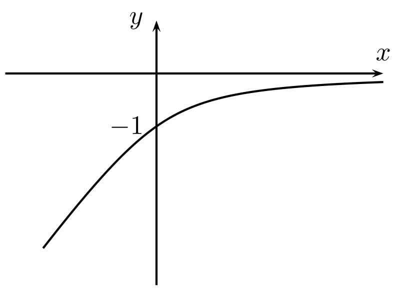
e

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0.$$ [33]

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Si può osservare che la derivata ha a denominatore una quantità positiva e a numeratore l'opposto della funzione stessa (cioè $-f(x)$). Quindi possiamo concludere immediatamente che la derivata è positiva in tutto $\mathbb{R}$. La funzione è quindi crescente nel suo dominio e non vi sono punti di massimo o di minimo locale. Ecco un grafico sommario (nell'origine la funzione vale $f(0) = -1$).



La funzione è limitata superiormente, ma non ha massimo. Non è limitata inferiormente. Non studiamo la derivata seconda.

[31] Ovviamente impossibile se $x < 0$ e, per $x \geq 0$, elevando al quadrato si ottiene $x^2 = x^2 + 1$, che non è mai vera.
[32] Se x è negativo la cosa è evidente. Se x è positivo, elevando al quadrato, si ottiene $x^2 < x^2 + 1$, che è certamente vera.
[33] Da notare che questo limite si deve necessariamente risolvere con la razionalizzazione. Non sono applicabili né i confronti né i principi di eliminazione/sostituzione.

▶ 10. Studiamo la funzione $f(x) = x^2 - \ln x$.
La funzione è definita sulle x positive, cioè sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dove è definita è continua e derivabile.
Lo studio del segno risulterebbe difficile in questo caso e per il momento lo saltiamo.[34]
Calcoliamo direttamente i limiti agli estremi del dominio, cioè in 0 da destra e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2 - \ln x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty}(x^2 - \ln x) = +\infty.$$ [35]

Studiamo ora la derivata. Si ha

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Questo quoziente si annulla in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ma soltanto il primo dei due è accettabile quale punto stazionario di f.
Studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{nell'intervallo } (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

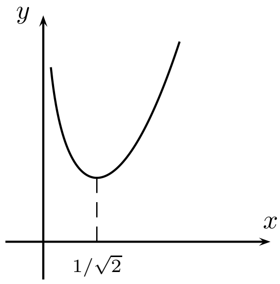
e invece

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo } (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Pertanto possiamo dire che la funzione è decrescente in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e crescente in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. Inoltre il punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale.
Qui non è difficile studiare la derivata seconda. Si trova che la funzione è convessa in quanto

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}.$$

Ecco un grafico sommario.



In realtà è doverosa una precisazione. Non abbiamo studiato il segno della funzione, quindi per quanto ne sappiamo non è detto che la funzione sia sempre positiva nel suo dominio. Questo problema si può però risolvere facilmente, dato che se risulta che nel punto di minimo $(\frac{1}{\sqrt{2}})$ la funzione è positiva, allora possiamo concludere che lo è sempre.
Risulta infatti

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{2} - \ln \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} + \ln \sqrt{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln 2 > 0.$$

A conclusione possiamo osservare che $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo globale e che la funzione non è limitata superiormente.

[34] L'equazione $x^2 - \ln x = 0$ (o la disequazione $x^2 - \ln x > 0$) non appartiene a nessuna delle classi di equazioni che siamo in grado di risolvere in modo esatto.
[35] Il risultato segue dal principio di eliminazione: il logaritmo è trascurabile rispetto a x^2 per $x \to +\infty$.