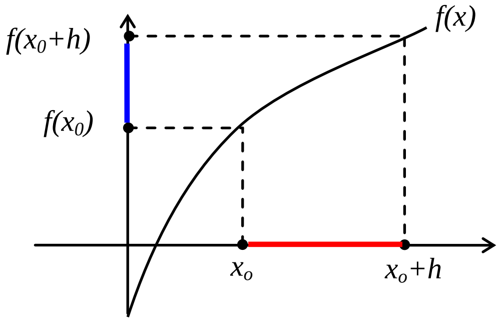
Rapporto incrementale – Derivata

definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto x_0



- data una funzione $y = f(x)$ ed un punto $\boldsymbol{x_0}$ appartenente al dominio D della funzione
- si chiama **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- $\boldsymbol{\Delta x} = (x_0 + h) - x_0 = h$ si chiama **incremento della variabile x**
- $\boldsymbol{\Delta y} = f(x_0 + h) - f(x_0)$ si chiama **incremento della funzione**

il rapporto incrementale ha senso per ogni h tale che $x_0 + h$ appartiene ancora al dominio D della funzione

definizione di derivata prima di una funzione in un punto x_0

- data una funzione $y = f(x)$ ed un punto $\boldsymbol{x_0}$ del dominio D della funzione
- si definisce **derivata prima di $\boldsymbol{f(x)}$ nel punto $\boldsymbol{x_0}$** il limite, **se esiste ed è finito**, del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se una funzione è derivabile in tutti i punti del dominio si dice che $f(x)$ è derivabile nel dominio e per indicare la derivata prima si usano equivalentemente i simboli: $f'(x)$, $y'(x)$, $Df(x)$

definizione di derivata prima destra e sinistra di una funzione in un punto x_0

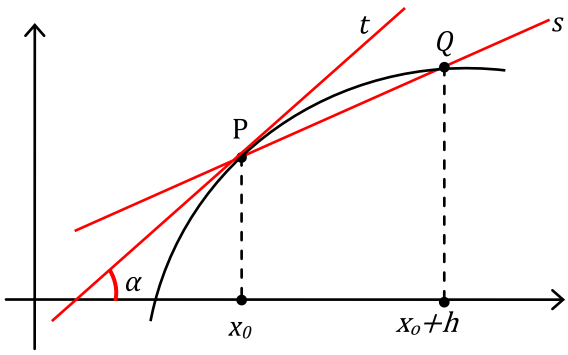
si definisce **derivata prima sinistra di $\boldsymbol{f(x)}$ nel punto $\boldsymbol{x_0}$** il limite sinistro, **se esiste ed è finito,** del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0 :

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si definisce **derivata prima destra di $\boldsymbol{f(x)}$ nel punto $\boldsymbol{x_0}$** il limite destro, **se esiste ed è finito**, del rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

significato geometrico di derivata



la derivata prima di una funzione in un suo punto $P(x_0, f(x_0))$ è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta t tangente alla funzione in P forma con la direzione positiva dell'asse x. Cioè:

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

ricordando che:

$$tg\alpha = m \;\rightarrow\; \boldsymbol{f'(x_0) = tg\alpha = m}$$

m = coefficiente angolare di t

l'equazione della retta tangente t in un punto x_0, se esiste, è data dal limite per $h \to 0$ dell'equazione della retta secante s.

In altre parole: la **retta tangente in P** è la retta passante per P ed avente coefficiente angolare uguale alla derivata prima della funzione calcolata in x_0

per trovare l'equazione della retta tangente ad una funzione $f(x)$ nel punto $P(x_0, f(x_0))$:

- si utilizza l'equazione del fascio di rette $y - y_0 = m(x - x_0)$
- si sostituisce $m \to f'(x_0)$ e $y_0 \to f(x_0)$ nell'equazione del fascio
- si ottiene così l'equazione della retta tangente: $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$