Esercizi sullo studio di funzione

Prima parte

Per poter descrivere una curva, data la sua equazione cartesiana esplicita $y = f(x)$ occorre procedere secondo l'ordine seguente:

1) Determinare l'insieme di esistenza della $f(x)$.
2) Determinare gli eventuali punti di intersezione della curva con gli assi coordinati.
3) Studiare il segno della funzione.
4) Ricercare eventuali asintoti della curva.
5) Studiare gli zeri e il segno della derivata prima in modo da studiare la crescenza e la decrescenza della curva e i suoi massimi e minimi relativi.

In questa prima parte analizzeremo soltanto i primi tre punti:

1) Determinare l'insieme di esistenza (o campo di esistenza o dominio) significa trovare per quali valori della variabile indipendente x si ha un valore della variabile dipendente y determinato.
   Per determinare l'insieme di esistenza di una funzione è utile ricordare che le operazioni di somma, differenza e prodotto sono sempre possibili, mentre la divisione è sempre possibile purché il divisore sia diverso da zero. Segue che:
   - Una funzione polinomiale ha come insieme di esistenza l'insieme dei numeri reali.
   - Una funzione polinomiale fratta ha come insieme di esistenza tutti i numeri reali tranne quelli che, eventualmente, annullano il denominatore.
2) Determinare gli eventuali punti di intersezione della curva con gli assi coordinati significa trovare le coordinate dei punti in cui, eventualmente, la funzione interseca l'asse x e le coordinate dei punti in cui, eventualmente, la funzione interseca l'asse y.
   - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione.
   - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione.
3) Studiare il segno della funzione significa determinare per quali valori di x la funzione è positiva e per quali valori è negativa.

Esercizio 1

Determinare il campo di esistenza, le intersezioni con gli assi coordinati e studiare il segno delle seguenti funzioni:

1) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x}$

3) $y = \dfrac{(x-6)(x-3)}{x(x-8)(x-4)}$

4) $y=\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}$

5) $y=\frac{x^3-3x}{x^2-9}$

6) $y=\frac{x^2+10x+15}{x^2+3}$

7) $y=\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

8) $y=\frac{x^2-9}{3x^2-9x-9}$

Soluzione

1) La funzione è

$$(1) \qquad y=x^3-2x^2-x+2\,.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Prendendo i fattori a due a due e mettendo in evidenza avremo:

$$x^3-2x^2-x+2 \Rightarrow x^2(x-2)-(x-2) \Rightarrow (x-2)(x^2-1) \Rightarrow (x-2)(x-1)(x+1)$$

quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y=(x-2)(x-1)(x+1)$$

- CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale quindi per ogni valore della variabile indipendente x si ha un valore della variabile dipendente y determinato. Segue che

$$C.E.=(-\infty,+\infty)\,.$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x=0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x=0 \Rightarrow y=2$$

quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0,2)$.

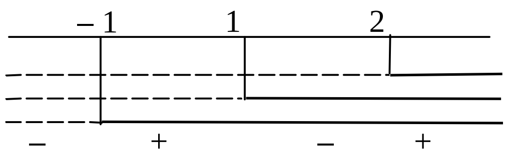
- Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y=0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

quindi la funzione interseca l'asse x nei tre punti di coordinate $(-1,0);(1,0);(2,0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (2). Avremo

$x-2>0$ per $x>2$
$x-1>$ per $x>1$
$x+1>0$ per $x>-1$



quindi si ha

$$\begin{array}{l} y>0 \quad \text{per} \quad -1<x<1 \quad \text{e} \quad x>2 \\ y<0 \quad \text{per} \quad x<-1 \quad \text{e} \quad 1<x<2 \end{array}.$$

2) La funzione è

$$y=\frac{x^2+3}{x}.$$

Il polinomio è già scomposto. Avremo quindi:

CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, ossia escluso $x=0$

Segue che

$$C.E.=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x=0$ nella funzione, ma siccome il valore $x=0$ non appartiene al campo di esistenza non lo possiamo considerare. Segue che la funzione non interseca l'asse y.

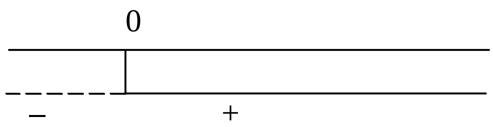
- o Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y=0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x}=0$$

Ma siccome il numeratore non si annulla mai perché è sempre positivo segue che la funzione non interseca nemmeno l'asse x.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Studiamo il segno della funzione.

$$\begin{array}{ll} x^2+3>0 & \text{per ogni } x \\ x>0 & \text{per} \quad x>0 \end{array}$$



quindi si ha

$$\begin{array}{lll} y>0 & \text{per} & x>0 \\ y<0 & \text{per} & x<0 \end{array}.$$

3) La funzione è

$$y=\frac{(x-6)(x-3)}{x(x-8)(x-4)}.$$

Il polinomio è già scomposto. Avremo quindi:

- CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, che sono

$$\begin{cases} x=0 \\ x=8 \\ x=4 \end{cases}$$

Segue che

$$C.E.=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,8)\cup(8,+\infty).$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - o Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x=0$ nella funzione, ma siccome il valore $x=0$ non appartiene al campo di esistenza non lo possiamo considerare. Segue che la funzione non interseca l'asse y.

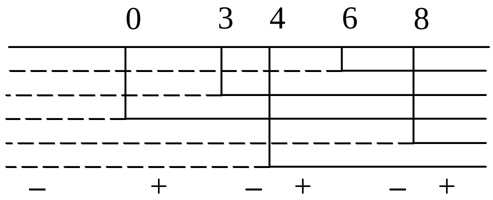
o Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y=0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$y=0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-3)}{x(x-8)(x-4)}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=3 \end{cases}$$

quindi la funzione interseca l'asse x nei due punti di coordinate $(3,0)$ e $(6,0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Studiamo il segno della funzione.

$x-6>0$ per $x>6$
$x-3>0$ per $x>3$
$x>0$ per $x>0$
$x-8>0$ per $x>8$
$x-4>0$ per $x>4$



quindi si ha

$$\begin{array}{l} y>0 \quad \text{per} \quad 0<x<3 \quad \text{e} \quad 4<x<6 \quad \text{e} \quad x>8 \\ y<0 \quad \text{per} \quad x<0 \quad \text{e} \quad 3<x<4 \quad \text{e} \quad 6<x<8 \end{array}.$$

4) La funzione è

$$(1) \qquad y=\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Avremo:

- Numeratore:

$$x^2-6x+9 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 9}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 0}{2} \Rightarrow \{x_1=x_2=3$$

e quindi

$$x^2-6x+9=(x-3)^2.$$

- Denominatore:

$$x^2-4=(x-2)(x+2).$$

Quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y = \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)} .$$

- CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, che sono

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Segue che

$$C.E. = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty) .$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{(0-3)^2}{(0-2)(0+2)} = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$$

  quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0,-9/4)$.

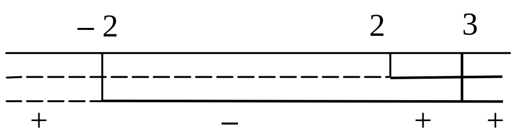
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y = 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow x = 3$$

  quindi la funzione interseca l'asse x nel punto di coordinate $(3, 0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (2). Avremo

$(x-3)^2 > 0$ per ogni $x \neq 3$
$x - 2 > 0$ per $x > 2$
$x + 2 > 0$ per $x > -2$



quindi si ha

$$\begin{array}{l} y > 0 \quad \text{per} \quad x < -1 \quad \text{e} \quad 2 < x < 3 \quad \text{e} \quad x > 3 \\ y < 0 \quad \text{per} \quad -2 < x < 2 \end{array} .$$

5) La funzione è

$$(1) \qquad y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 9}.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Avremo

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 9} \Rightarrow y = \frac{x(x^2 - 3)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow y = \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x+3)}$$

Quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y = \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x+3)}.$$

- CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, che sono

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Segue che

$$C.E. = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - o Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0 - 3 \cdot 0}{0 - 9} = 0$$

quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0,0)$ ossia nell'origine.

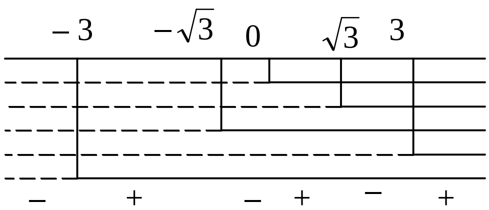
  - o Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x+3)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

quindi la funzione interseca l'asse x nei tre punti di coordinate $(0,0); (\sqrt{3},0); (-\sqrt{3},0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (2). Avremo

$$\begin{array}{lll} x>0 & \text{per} & x>0 \\ x-\sqrt{3}>0 & \text{per} & x>\sqrt{3} \\ x+\sqrt{3}>0 & \text{per} & x>-\sqrt{3} \\ x-3>0 & \text{per} & x>3 \\ x+3>0 & \text{per} & x>-3 \end{array}$$



quindi si ha

$$\begin{array}{lllllll} y>0 & \text{per} & 3<x<-\sqrt{3} & \text{e} & 0<x<\sqrt{3} & \text{e} & x>3 \\ y<0 & \text{per} & x<-3 & \text{e} & -\sqrt{3}<x<0 & \text{e} & \sqrt{3}<x<3 \end{array}.$$

6) La funzione è

$$(1) \qquad y=\frac{x^2+10x+15}{x^2+3}.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Avremo:

- Numeratore:

$$x^2+10x+15 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot 15}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{40}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-10\pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5-\sqrt{10} \\ x_2=-5+\sqrt{10} \end{cases}$$

e quindi

$$x^2+10x+15=\left(x-\left(-5-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(-5+\sqrt{10}\right)\right).$$

- Denominatore: x^2+3 non può essere scomposto in quanto è un polinomio sempre positivo.

Quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y=\frac{\left(x-\left(-5-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(-5+\sqrt{10}\right)\right)}{x^2+3}.$$

CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, ma siccome il denominatore è sempre positivo segue che

$$C.E. = (-\infty, +\infty).$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{3} \Rightarrow y = 5$$

quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0,5)$.

  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\left(x-\left(-5-\sqrt{10}\right)\right)\left(x-\left(-5+\sqrt{10}\right)\right)}{x^2+3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5-\sqrt{10} \\ x_2 = -5+\sqrt{10} \end{cases}$$

quindi la funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate $(-5-\sqrt{10}, 0); (-5+\sqrt{10}, 0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (2). Avremo

$$\begin{array}{ll} \left(x-\left(-5-\sqrt{10}\right)\right) > 0 & \text{per} \quad x > -5-\sqrt{10} \\ \left(x-\left(-5+\sqrt{10}\right)\right) > 0 & \text{per} \quad x > -5+\sqrt{10} \\ x^2+3 > 0 & \text{per ogni valore di } x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & -5-\sqrt{10} & & -5+\sqrt{10} & \\ + & & - & & + \end{array}$$

quindi si ha

$$\begin{array}{ll} y > 0 & \text{per} \quad x < -5-\sqrt{10} \quad \text{e} \quad x > -5+\sqrt{10} \\ y < 0 & \text{per} \quad -5-\sqrt{10} < x < -5+\sqrt{10} \end{array}.$$

7) La funzione è

$$(1) \qquad y = \frac{x^2+2x-15}{x^2-9}.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Avremo:

- Numeratore:

$$x^2+2x-15 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot(-15)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2\pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

e quindi

$$x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3).$$

- Denominatore:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y = \frac{(x+5)(x-3)}{(x-3)(x+3)}.$$

A questo punto occorre stare attenti! In teoria è possibile semplificare il fattore $x-3$ in quanto compare sia al numeratore che al denominatore. Non si può tuttavia fare prima che venga discusso il campo di esistenza, ossia prima di aver escluso il valore $x = 3$.

CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, quindi

$$C.E. = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

A questo punto è possibile semplificare. Otterremo così la funzione nella forma equivalente

$$(3) \qquad y = \frac{x+5}{x+3}$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

    quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 5/3)$.

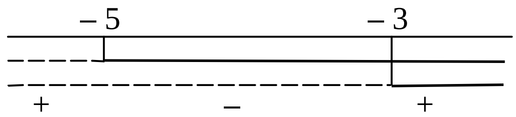
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x+3} = 0 \Rightarrow x = -5$$

    quindi la funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate $(-5, 0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (3). Avremo

$$x+5>0 \quad \text{per} \quad x>-5$$
$$x+3>0 \quad \text{per} \quad x>-3$$



quindi si ha

$$\begin{aligned} &y>0 \quad \text{per} \quad x<-5 \;\text{ e }\; x>-3 \\ &y<0 \quad \text{per} \quad -5<x<-3 \end{aligned}.$$

8) La funzione è

$$(1) \qquad y=\frac{x^2-9}{3x^2-9x-9}.$$

Scomponiamo il polinomio in modo da ottenere una forma più facile da trattare in certi casi. Avremo:

- Numeratore:

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

- Denominatore:

$$3x^2-9x-9 \Rightarrow 3(x^2-3x-3) \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-3)}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$$

quindi si ha $\Delta<0$ e quindi il polinomio al denominatore non è scomponibile ed è anche sempre positivo in quanto il coefficiente di x^2 è positivo.

Quindi la funzione di partenza può essere scritta anche nella forma equivalente

$$(2) \qquad y=\frac{(x-3)(x+3)}{3(x^2-3x-3)}.$$

CAMPO DI ESISTENZA: la funzione è polinomiale fratta quindi si ha un valore della variabile dipendente y determinato per ogni valore della variabile indipendente x esclusi quelli che annullano il denominatore, e siccome il denominatore non si annulla mai si ha

$$C.E.=(-\infty,+\infty).$$

- INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI.
  - Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x=0$ nella funzione. In questo caso avremo

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{-9}{-9} \Rightarrow y = 1$$

quindi la funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0,1)$.

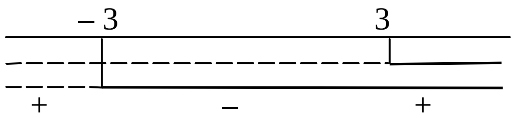
- Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione. In questo caso, considerando la funzione nella forma (2), avremo

$$y = \frac{(x-3)(x+3)}{3(x^2 - 3x - 3)}$$

quindi la funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate $(3, 0); (-3,0)$.

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Per studiare il segno della funzione ci conviene considerare la forma (2). Avremo

$$x - 3 > 0 \quad \text{per} \quad x > 3$$
$$x + 3 > 0 \quad \text{per} \quad x > -3$$
$$3(x^2 - 3x - 3) > 0 \quad \text{per ogni valore di } x$$



quindi si ha

$$\begin{aligned} &y > 0 \quad \text{per} \quad x < -3 \;\; \text{e} \;\; x > 3 \\ &y < 0 \quad \text{per} \quad -3 < x < 3 \end{aligned}.$$