EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizioni: Dicesi ***equazione di secondo grado***, un'espressione del tipo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
I valori a, b, c prendono il nome di ***coefficienti*** e, in particolare, c viene detto ***termine noto***.

Un'equazione di secondo grado si definisce:

- ***incompleta pura*** quando il secondo coefficiente è nullo e quindi si ha:

$$ax^2 + c = 0$$

- ***incompleta spuria*** quando il terzo coefficiente è nullo e quindi si ha:

$$ax^2 + bx = 0$$

- ***completa*** quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero e quindi si ha:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

1 – EQUAZIONE INCOMPLETA PURA $(b = 0)$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + c = 0$$

e si risolve portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente del termine di grado massimo:

$$ax^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 - 9 = 0$.

Le soluzioni si ottengono come segue:

$$x^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 + 9 = 0$.

E. Modica
www.galois.it

L'equazione non ammette soluzioni in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo e, di conseguenza, la scrittura $x^2 = -\frac{9}{4}$ non è verificata per nessun valore dell'incognita.

<u>*Osservazione*</u>: Un'equazione incompleta pura ammette soluzioni se, e solo se, i coefficienti a e c sono discordi.

2 – EQUAZIONE INCOMPLETA SPURIA $(c = 0)$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

e si risolve mettendo in evidenza la x e procedendo secondo la legge di annullamento del prodotto[1]. Di conseguenza una soluzione sarà sempre quella nulla.

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(ax + b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $2x^2 - 4x = 0$.

Si ha:

$$2x(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad x = 2$$

3 – EQUAZIONE COMPLETA

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolverla si procede come segue:

- si calcola il ***discriminante*** dell'equazione: $\Delta = b^2 - 4ac$,
- le soluzioni sono quindi date dalla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[1] Un prodotto si annulla se, e solo se, almeno uno dei suoi fattori è nullo.

Si possono quindi presentare tre casi:

<u>1° caso</u>: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le ***due soluzioni reali e distinte***:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>2° caso</u>: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso l'equazione ammette ***due radici reali e coincidenti*** date dall'espressione:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

<u>3° caso</u>: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso l'equazione ***non ammette soluzioni reali***, ma soluzioni complesse coniugate.

Esempi:

1. Risolvere l'equazione $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

2. Risolvere l'equazione $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

3. Risolvere l'equazione $x^2 - x + 3 = 0$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

L'equazione non ammette soluzioni reali.

RELAZIONI TRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI

Consideriamo una generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nell'ipotesi in cui ammette soluzioni reali distinte (cioè $\Delta > 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Quindi:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	**Somma delle radici**
$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$	**Prodotto delle radici**

Esempio: *Data l'equazione* $x^2 - 5x + 6 = 0$, *determinare, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Applicando le precedenti formule si ha:

- $x_1 + x_2 = \frac{5}{1} = 5;$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6.$

SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI II GRADO IN FATTORI

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c$ ed effettuiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = & \quad (\textit{sostituendo le relazioni precedenti}) \\ = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = & \\ = a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2] = & \quad (\textit{raccogliendo parzialmente}) \\ = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = & \\ = a(x - x_1)(x - x_2) & \end{aligned}$$

Esempio: *Dato il trinomio* $x^2 - 5x + 6$, *scomporlo in fattori.*

Applicando la precedente formula si ha: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.