Sistemi di equazioni di primo grado

Definizioni

Risoluzione

Esercizi

Materia: Matematica Autore: Mario De Leo

Definizioni

Una equazione a più di una incognita non è risolvibile perché ha infinite soluzioni, in quanto per ogni valore assegnato alla *x* ne esisterà uno della *y* tale che l'uguaglianza sia verificata.

<u>ESEMPIO</u>: $x-y=3$

ha come soluzioni le coppie ordinate di valori (3 ; 0) (4 ; 1) (5 ; 2) .... (0 ; -3) (1 ; -2) (2 ; -1) .... (-2 ; -5) (-3 ; -6) …..........

Tra le infinite soluzioni di una equazione di questo tipo e le infinite soluzioni di un'altra equazione dello stesso tipo ci potranno essere delle soluzioni comuni.

L'insieme di equazioni, a più di una incognita, soddisfatte contemporaneamente dagli stessi valori è detto sistema di equazioni; i valori che soddisfano contemporaneamente le equazioni del sistema sono le soluzioni del sistema.

Il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Il numero delle possibili soluzioni di un sistema è dato dal suo grado.

Se un sistema ammette infinite soluzioni è detto indeterminato; se un sistema non ammette soluzioni è detto impossibile.

La forma canonica (normale) di un sistema, a due equazioni in due incognite, è:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$a_1,\, b_1,\, c_1,\, a_2,\, b_2,\, c_2 \quad \textit{sono i coefficienti delle due equazioni}$$

Risoluzione

Esistono quattro metodi per risolvere tali sistemi (sostituzione, confronto, riduzione e regola di Cramer) e perlopiù tendono ad eliminare in una delle equazioni del sistema una delle incognite (non tratteremo, per brevità, la regola di Cramer).

Prima di utilizzare uno dei tre metodi sotto indicati bisogna portare il sistema nella forma canonica.

Metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

1°) si risolve una delle equazioni rispetto ad una delle due incognite (ad esempio la x nella prima equazione), e si sostituisce tale valore nella seconda equazione (al posto della stessa incognita)

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ 3(y+3) + y = 5 \end{cases}$$

2°) si risolve l'equazione di primo grado così ottenuta (tenendo bloccata l'altra equazione)

$$\begin{cases} * \\ 3y + 9 + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} * \\ 3y + y = 5 - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} * \\ 4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} * \\ y = -1 \end{cases}$$

3°) ottenuto tale valore lo si sostituisce nell'altra equazione

$$\begin{cases} x - (-1) = 3 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

che è la soluzione del sistema.

Metodo del confronto:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

1°) si risolvono entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ x = \dfrac{5 - y}{3} \end{cases}$$

2°) si confrontano i valori trovati

$$3 + y = \frac{5 - y}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{9 + 3y}{3} = \frac{5 - y}{3} \quad \rightarrow$$

$$3y + y = 5 - 9 \quad \rightarrow \quad 4y = -4 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

3°) tale valore lo si sostituisce in una delle due equazioni

$$\begin{cases} x - (-1) = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

che è la soluzione del sistema.

Metodo di riduzione (o di addizione e sottrazione):

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

1°) se i coefficienti di una delle due incognite sono uguali si sottraggono membro a membro le due equazioni, se i coefficienti sono opposti si sommano membro a membro le due equazioni (se non lo sono si moltiplica una delle due equazioni, o tutte e due, per un numero idoneo)

$$x - y + (3x + y) = 3 + 5 \quad \rightarrow \quad x - y + 3x + y = 3 + 5 \quad \rightarrow \quad 4x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

3°) tale valore lo si sostituisce in una delle due equazioni

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3(2) + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 6 + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

che è la soluzione del sistema.

Per comodità il primo passaggio si può eseguire come una operazione, di addizione o sottrazione, in colonna:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \underline{3x + y = 5} \end{cases}$$

$$4x \quad // \quad = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Esercizi

1) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = +1 \\ y = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ 9x + 15y = 45 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = +3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$ $[indeterminato]$

5) $\begin{cases} 9x + 6y = 2 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$ $[impossibile]$

6) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{5}{6} \\ \frac{x}{5} - \frac{y+5}{10} = \frac{2x-1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2(2x - y) - (x+1) = 3(y-3) \\ (x-2)(2y+1) = 2x(y-1) - 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = +1 \end{cases}$