LA TANGENZA ALLA CIRCONFERENZA

Il problema della tangenza alla circonferenza si riconduce allo studio di 3 casi:

1. Data l'equazione di una circonferenza e di una retta determinare se queste sono secanti, tangenti o esterne.

   In questo caso si mettono a sistema le equazioni delle due curve e si studia il segno del discriminante:

   $\Delta > 0$ SECANTI $\rightarrow$ hanno 2 punti in comune
   $\Delta = 0$ TANGENTI $\rightarrow$ hanno 1 punto in comune
   $\Delta < 0$ ESTERNE $\rightarrow$ nessun punto in comune

   Quindi, per trovare i punti comuni, si termina di risolvere il sistema.

   <u>Esempio</u>

   Determinare la relazione tra la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ *e la retta* $y = 2x - 1$.

   Si costruisce il sistema risolutivo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ che dà luogo all'equazione di 2° grado:
   $x^2 + (2x-1)^2 = 1$ ossia $5x^2 - 4x = 0$.
   Allora $\Delta = 16 - 0 = 16 > 0$ e retta e circonferenza sono secanti.
   Cerchiamo i punti comuni finendo di risolvere il sistema:

   $\begin{cases} x(5x-4) = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = \frac{4}{5} \\ y_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$ da cui $A(0,-1)$ e $B\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

   Esercizi
   Determinare se le rette date sono secanti, tangenti o esterne alle circonferenze date:
   1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ $x + 2y - 1 = 0$
   2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ $x - y - 3 = 0$
   3) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 15y - 12 = 0$ $y = 2x - 4$

2. Data l'equazione di una circonferenza, determinare le equazioni delle rette tangenti condotte alla circonferenza da un punto esterno ad essa.

   In questo caso si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per il punto dato, si mette a sistema con l'equazione della circonferenza e si impone che sia $\Delta = 0$. Si risolve l'equazione così ottenuta, ottenendo il valore del coefficiente angolare delle rette tangenti, che si sostituiscono nell'equazione del fascio per trovare le equazioni richieste.

Esempio

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ *passanti per* $P(3,5)$.

Il fascio di rette per il punto P ha equazione generale: $y-y_P=m(x-x_P)$. Nel caso dato diventa allora $y-5=m(x-3)$ ossia $y=mx-3m+5$.

Il sistema risolutivo risulta quindi essere: $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1=0 \\ y=mx-3m+5 \end{cases}$ da cui

$$x^2+(mx-3m+5)^2-2x+4(mx-3m+5)+1=0$$

$$(1+m^2)x^2+(-6m^2+14m-2)x+9m^2-42m+46=0$$

Si impone $\Delta=0$ ottenendo:

$$(-6m^2+14m-2)^2-4\cdot(1+m^2)\cdot(9m^2-42m+46)=0$$

$$36m^4+196m^2+4-168m^3+24m^2-56m-36m^2+168m-184-36m^4+168m^3-184m^2=0$$

$$112m-180=0$$

$$m=\frac{180}{112}=\frac{45}{28}$$

e la retta tangente cercata ha dunque equazione: $y=\frac{45}{28}x-\frac{107}{28}$.

Esercizi

Determinare le equazioni delle rette tangenti alle circonferenze date per il punto dato:

1) $x^2+y^2+6x+4y+8=0$ $\quad P(4,-1)$
2) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ $\quad P(5,4)$

3. Data l'equazione di una circonferenza, determinare l'equazione della retta tangente passante per un punto della circonferenza.

In questo caso si ricava l'equazione della retta tangente cercata utilizzando la **legge dello sdoppiamento** sull'equazione della circonferenza stessa.
In base a tale legge si sostituiscono nell'equazione:

$$x^2=x\cdot x_P$$

$$y^2=y\cdot y_P$$

$$x=\frac{x+x_P}{2}$$ dove il punto ha coordinate $P(x_P,y_P)$

$$y=\frac{y+y_P}{2}$$

da cui l'equazione della tangente cercata diventa: $x\cdot x_P+y\cdot y_P+a\cdot\frac{x+x_P}{2}+b\cdot\frac{y+y_P}{2}+c=0$.

Esempio

Determinare l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2=1$ *nel suo punto* $P(0,1)$.

Per la legge di sdoppiamento si sostituiscono: $\begin{array}{l} x^2 = x \cdot 0 \\ y^2 = y \cdot 1 \end{array}$ quindi l'equazione della tangente cercata è: $y = 1$.

Esercizi

Determinare le equazioni delle rette tangenti alle circonferenze date passanti per i punti dati:

1) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 23 = 0$ $\qquad P(3{,}1)$
2) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 12y + 5 = 0$ $\qquad P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$