EQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice dispari

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = [B(x)]^n$	$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x)$

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - x} = x - 1}$; $\qquad x^3 - x = (x-1)^3$; $\qquad x^3 - x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

$3x^2 - 4x + 1 = 0$; $\qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp 1}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[5]{3x - 8} = \sqrt[5]{2x - 3}}$; $\qquad 3x - 8 = 2x - 3$; $\qquad x = 5$.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice dispari

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < [B(x)]^n$	$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < B(x)$
$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > [B(x)]^n$	$\sqrt[n]{A(x)} > \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > B(x)$

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - x}} < x - 1$; $\qquad x^3 - x < (x-1)^3$; $\qquad x^3 - x < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

$3x^2 - 4x + 1 < 0$; $\qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp 1}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{matrix}$ $\qquad$ La soluzione è $\quad \frac{1}{3} < x < 1$

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[5]{3x - 8}} < \boldsymbol{\sqrt[5]{2x - 3}}$; $\qquad 3x - 8 < 2x - 3$; $\qquad x < 5$.

EQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice pari

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$	$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$
$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = k^n$	$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\, x \in R$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:
1. determinare dapprima le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0)
2. studiare il segno di ciascun membro prima di ogni innalzamento a potenza.

Esempio 1

$\sqrt[2]{x+1} = 5 - x$; $\quad \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 = (5-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x \geq -5 \\ x + 1 = 25 + x^2 - 10x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$

Risolvo $x^2 - 11x + 24 = 0$; $\Delta = 121 - 96 = 25$; $x_{1,2} = \frac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 & accettabile \\ x_2 = 8 & non\ accettabile \end{matrix}$

Esempio 2

$\sqrt[4]{3x-8} = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$; $\quad \begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 6x \geq 0 \\ 3x - 8 = x^2 - 6x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ x \leq 0 \ \vee \ x \geq 6 \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 6 \\ x_1 = 1 & non\ accettabile \\ x_2 = 8 & accettabile \end{cases}$

Esempio 3

$\sqrt[2]{2-x} = 3$; $\quad 2 - x = 3^2$; $\quad x = -7$.

Esempio 4

$\sqrt[2]{2-x} = -3$; $\quad \nexists\, x \in R$.

Esempio 5

$\sqrt[2]{2x} - \sqrt[2]{x+7} = -1$; Le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -7 \end{cases} \quad x \geq 0 \quad (1)$

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{2x} + 1 = \sqrt[2]{x+7}$; elevando al quadrato entrambi i membri $\left(\sqrt{2x} + 1\right)^2 = \left(\sqrt[2]{x+7}\right)^2$ si ottiene:

$2x + 1 + 2\sqrt{2x} = x + 7$; $\quad 2\sqrt{2x} = 6 - x$; questa equazione è del primo tipo (*primo esempio*).

$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{2x}\right)^2 = (6-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ 8x = 36 + x^2 - 12x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6 & (2) \\ x^2 - 20x + 36 = 0 \end{cases}$

Risolvo $x^2 - 20x + 36 = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 100 - 36 = 64$; $x_{1,2} = 10 \mp 8 = \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 18 \end{matrix}$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) , sia la condizione di concordanza di segno (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 6$

Pertanto soltanto la soluzione $x_1 = 2$ è accettabile.

Esempio 6

$\sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{x+5}=-\sqrt[2]{x-3}$; Le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+5\geq 0 \\ x-3\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq -5 \\ x\geq 3\end{cases}$ $x\geq 3$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{x-3}=\sqrt[2]{x+5}$; elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$\left(\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{x-3}\right)^2=\left(\sqrt[2]{x+5}\right)^2$; $x+x-3+2\sqrt[2]{x\cdot(x-3)}=x+5$;

$2\sqrt{x^2-3x}=8-x$; risolviamo questa equazione come nell'esempio 1.

$\begin{cases} 8-x\geq 0 \\ \left(2\sqrt{x^2-3x}\right)^2=(8-x)^2\end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 8 \\ 4(x^2-3x)=64+x^2-16x\end{cases}$

$\begin{cases} x\leq 8 \\ 4x^2-12x=64+x^2-16x\end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 8 \\ 3x^2+4x-64=0\end{cases}$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{3}=\frac{-2\pm 14}{3}=$ $x_1=\frac{-2-14}{3}=-\frac{16}{3}$; $x_2=\frac{-2+14}{3}=\frac{12}{3}=4$

$\begin{cases} x\leq 8 \\ x_1=-\frac{16}{3} \quad \vee \quad x_2=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_1=-\frac{16}{3}$ $\vee$ $x_2=4$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare le condizioni di esistenza (1).

Pertanto la soluzione $x_2=4$ è accettabile, mentre la soluzione $x_1=-\frac{16}{3}$ non è accettabile.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S=\{4\}$

Esempio 7

$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+5}=-3$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{x+2}+3=2\sqrt{x+5}$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+5\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -5\end{cases}$ $x\geq -2$ $(*)$

Sotto queste condizioni, elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{x+2}+3\right)^2=\left(2\sqrt{x+5}\right)^2$; $x+2+9+6\sqrt{x+2}=4(x+5)$;

$6\sqrt{x+2}=4x+20-x-2-9$; $6\sqrt{x+2}=3x+9$;

$2\sqrt{x+2}=x+3$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $x+3\geq 0$

$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ \left(2\sqrt{x+2}\right)^2=(x+3)^2\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -3 \\ 4(x+2)=x^2+9+6x\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -3 \\ 4x+8=x^2+9+6x\end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+2x+1=0\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -3 \\ (x+1)^2=0\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -3 \\ x=-1\end{cases}$ $x=-1$

La soluzione $\boxed{x=-1}$ è accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza $(*)$ $x\geq -2$.

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

1. determinare dapprima le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0)
2. studiare il segno di ciascun membro prima di ogni innalzamento a potenza.

Esempio 1

$\sqrt[2]{\boldsymbol{x+1}} < 5 - x$; $\quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x > 0 \\ x+1 < (5-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 5 \\ x+1 < 25 + x^2 - 10x \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x^2 - 11x + 24 > 0 \end{cases}$

$Risolvo \quad x^2 - 11x + 24 > 0$; $\quad \Delta = 121 - 96 = 25$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ \\ x_2 = 8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x < 3 \ \vee \ x > 8$

Pertanto si ha: $\begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x < 3 \ \vee \ x > 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x < 3$.

Esempio 2

$\sqrt[2]{\boldsymbol{x+1}} > 5 - x$; $\quad \begin{cases} 5-x < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 > (5-x)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 5 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x+1 > 25 + x^2 - 10x \end{cases}$

$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 < 0 \end{cases}$

$Risolvo \quad x^2 - 11x + 24 < 0$; $\quad \Delta = 121 - 96 = 25$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ \\ x_2 = 8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 3 < x < 8$

Pertanto la soluzione è data da: $\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ 3 < x < 8 \end{cases}$

Ossia $\quad 3 < x \leq 5 \quad \vee \quad x > 5$

Sintetizzando si può scrivere: $\ x > 3$.

Esempio 3

$\sqrt[2]{2x-1} - \sqrt[2]{x} \leq \sqrt[2]{2-x}$; Le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{2x-1} \leq \sqrt[2]{2-x} + \sqrt[2]{x}$; elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$\left(\sqrt[2]{2x-1}\right)^2 \leq \left(\sqrt[2]{2-x} + \sqrt[2]{x}\right)^2$; $2x-1 \leq 2-x+x+2\sqrt{x(2-x)}$;

$2x-1 \leq 2+2\sqrt{2x-x^2}$; $2x-3 \leq 2\sqrt{2x-x^2}$

Quest'ultima equazione è del secondo tipo. Essa si risolve considerando i due seguenti sistemi:

$\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ V $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ (2x-3)^2 \leq 4(2x-x^2) \end{cases}$

$\begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 4x^2+9-12x \leq 8x-4x^2 \end{cases}$

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ V $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-72}}{8} = \dfrac{10 \pm \sqrt{28}}{8} =$ $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{28}}{8} = \dfrac{10-\sqrt{4\cdot 7}}{8} = \dfrac{10-2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}$

$x_2 = \dfrac{10+\sqrt{28}}{8} = \dfrac{10+\sqrt{4\cdot 7}}{8} = \dfrac{10+2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

$0 \leq x < \dfrac{3}{2}$ V $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5-\sqrt{7}}{4} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4} \end{cases}$

$0 \leq x < \dfrac{3}{2}$ V $\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$ $\Rightarrow$ $0 \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

Ma queste soluzioni sono accettabili se rientrano nelle condizioni di esistenza (1) , poste in precedenza.

$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4} \\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è $S = \left\{ x \ / \ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{7}}{4} \right\}$

Esempio 4

$$\frac{\sqrt[2]{x^2-4x}}{3-\sqrt[2]{5-x}} \leq 0$$

Le C. E. sono: $\begin{cases} x^2-4x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 3-\sqrt[2]{5-x} \neq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4 \\ x \leq 5 \\ x \neq -4 \end{cases}$ $\quad x < -4 \ \vee \ -4 < x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x \leq 5$ (1)

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$\sqrt[2]{x^2-4x} \geq 0$; $\quad x^2-4x \geq 0$; $\quad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4$

$3-\sqrt[2]{5-x} > 0$; $\quad \sqrt[2]{5-x} < 3$; $\quad \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ \left(\sqrt[2]{5-x}\right)^2 < 3^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq 5 \\ \forall x \in R \\ 5-x < 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \leq 5 \\ \forall x \in R \\ x > -4 \end{cases}$ $\quad -4 < x \leq 5$

Costruiamo la tabella dei segni:

			-4		0		$+4$		$+5$	
$N \geq 0$	$x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4$	$+$		$+$	●	$-$	●	$+$		$+$
$D > 0$	$-4 < x \leq 5$	$-$	○	$+$		$+$		$+$	○	$-$
		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

Occorre accettare le soluzioni che rientrano nelle condizioni di esistenza (1), poste in precedenza.

Cioè occorre escludere dalle soluzioni gli intervalli $0 \leq x \leq 4$ e $x > 5$.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è $S = \{ \ x \quad / \quad x < 4 \ \}$