Antonella Greco, Rosangela Mapelli

E-Matematica

E-Book di Matematica per il triennio

Volume 1

Garamond
[didattica digitale]

COPIA SAGGIO
Campione gratuito fuori commercio
ad esclusivo uso dei docenti

Via Tevere, 21 Roma

Prima edizione
Volume 1

Cod. ISBN 978-88-86180-37-5

Premessa

Nel seguente volume gli esercizi sono stati scelti con i seguenti obiettivi:

- ✓ potenziare le conoscenze
- ✓ impadronirsi delle abilità necessarie per svolgere semplici problemi.

I test su competenze e problemi più complessi verranno caricati in piattaforma, insieme ai moduli di approfondimento.
Saranno, inoltre, pubblicati:
Learning object
Test interattivi di tipo a scelta multipla, completamento frase, a risposta aperta.
Mappe concettuali

INDICE GENERALE

Le Disequazioni

Disequazioni e loro proprietà

Disequazioni di I grado

Esercizio guida

Risolvere la disequazione $3x+5 \geq 2+6x$
Portiamo tutti i contenenti la variabile x a sinistra e tutti gli altri termini a destra $3x-6x \geq 2-5$
Risolviamo e otteniamo $-3x \geq -3$
Moltiplichiamo i due membri per -1 cioè cambiamo i segni alla disequazione $3x \leq 3$
!!! ATTENZIONE vengono cambiati tutti i segni, anche il segno di disuguaglianza.

La disequazione è verificata

$$x \leq 1$$

Risolvere le seguenti disequazioni numeriche intere

1. $\frac{1}{2}(x-3)-\frac{3}{4}x > 2-x$ $[x > \frac{14}{3}]$
2. $4\cdot(2x-1)+5 > 1-2\cdot(-3x-6)$ $[x > 6]$
3. $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x > \frac{1}{2}\cdot(3-x)$ $[\forall x \in R]$
4. $2(x-1)^2-2x(x+3) \leq 4-x$ $[x \geq -\frac{2}{9}]$
5. $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2} > \frac{(x-1)^2}{4}$ $[x < -2]$
6. $\frac{2x-1}{6}+\frac{2x+3}{4} < \frac{5}{6}x+1$ $[\forall x \in R]$
7. $\frac{x+4}{4}-\frac{x-1}{2} < -\frac{2x+1}{3}+\frac{x-6}{4}$ $[x < -20]$
8. $\frac{x+3}{4} < \frac{2x-1}{6}+\frac{1}{2}\left(3-\frac{x}{6}\right)$ $[\forall x \in R]$
9. $\sqrt{2}(x+2) < 2x$ $[x < \sqrt{2}+2]$
10. $(x+2)^2-4\cdot(x+1) < (x-1)\cdot(x+1)$ $[\nexists x \in R]$
11. $2x\left(\sqrt{3}-1\right) < \frac{x+2}{\sqrt{3}+1}$ $[x < \frac{2}{3}]$

12. $\frac{3}{2}\cdot(x+1)-\frac{1}{3}\cdot(1-x)<x+2$ $[x<1]$

13. $\frac{x}{2}(2x-1)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>0$ $[x>\frac{1}{2}]$

14. $(x+1)^3-(x+1)^2\le(x+2)^3-4(x+2)^2$ $[x\le-\frac{1}{14}]$

15. $(x+1)(x-1)-x(x+2)\le(x+2)-4(x-2)$ $[x\le 11]$

16. Sapendo che il triplo di un numero x, sommato al quadrato del suo doppio è maggiore a 4 volte il suo quadrato sottratto di 2. Determinare x. $[x>-\frac{2}{3}]$

17. Verificare se sono equivalenti le seguenti disequazioni

$x(x+2)+3\ge(x-1)^2+1$
$2(x+2)+8x-(1-2x)\ge 0$

[Sì, perché.......]

Esercizio guida

Svolgere la disequazione $2ax-2>2x-a$

$2ax-2>2x-a$ → **E' una disequazione letterale intera**

$2ax-2x>2-a$ → $(a-1)x>2-a$

Dobbiamo studiare il segno del I coefficiente, otteniamo i seguenti casi:

$a>1\Rightarrow x>\frac{2-a}{a-1}$ **In questo caso il coefficiente della x è positivo.**

Dividiamo per a- 1 e non cambiamo il verso della disequazione

$a=1\Rightarrow 0x>1\Rightarrow\nexists x\in R$

Sostituiamo al posto del parametro a il valore 1 e otteniamo una disuguaglianza falsa, per qualsiasi valore di x

$a<1\Rightarrow x<\frac{2-a}{a-1}$

In questo caso il coefficiente della x è negativo. Dividiamo per a-1 e cambiamo il verso della disequazione

Risolvere le seguenti disequazioni letterali intere:

18. $(a-1)x<a^2-1$ $[a<1\Rightarrow x<a+1; a=1\Rightarrow\nexists x\in R; a>1\Rightarrow x>a+1]$

19. $2ax-1\ge a^2x-1+a$ $[a<0\vee a>2\Rightarrow x\le\frac{1}{a-2}; a=0\vee a=2\Rightarrow\forall x\in R; 0<a<2\Rightarrow x\ge\frac{1}{a-2}]$

20. $1+3ax<\frac{1+2ax}{2}, a>0$ $[a=0\Rightarrow \forall x\in R; a>0\Rightarrow x<-\frac{1}{2a}]$

21. $(a-2)(x-1)-(x-2)(a+2)<ax$ $[a>-4\Rightarrow x>\frac{a+6}{a+4}; a=-4\Rightarrow \nexists x\in R; a<-4\Rightarrow x<\frac{a+6}{a+4}]$

22. $\frac{3ax-1}{a}-\frac{x-2}{2a}>0$ $[a<0\vee a>\frac{1}{6}\Rightarrow x>\frac{1}{6a-1}; a=\frac{1}{6}\Rightarrow \nexists x\in R; 0<a<\frac{1}{6}\Rightarrow x<\frac{1}{6a-1}]$

23. $(a-b)x<a^2-b^2, a>b>0$ $[x<a+b]$

24. Dati tre numeri 2a, 2a+x, 3a-x, determina per quali valori di x il prodotto dei primi due è maggiore del terzo, al variare di a.

    a. $[a>-\frac{1}{4}\Rightarrow x\geq\frac{a(3-4a)}{4a+1}; a=-\frac{1}{4}\Rightarrow \forall x\in R; a<-\frac{1}{4}\Rightarrow x\leq\frac{a(3-4a)}{4a+1}]$

25. Un rettangolo ha i lati che misurano 3a, 3a+x. Determinare per quali valori di x, al variare di a, a>0:

    il perimetro è maggiore di 2; $[0<a\leq\frac{1}{6}\Rightarrow x\geq 1-6a; a>\frac{1}{6}\Rightarrow \nexists x\in R]$

    b) l' area è minore o uguale a 9.

    $[0<a<1\Rightarrow x\leq\frac{3(1-a^2)}{a}; a=0\Rightarrow \nexists x\in R; -1<a<0\Rightarrow x\geq\frac{3(1-a^2)}{a}]$

Segno di un prodotto

Esercizio guida

Svolgere la seguente disequazione

$(x-1)(x+4)(3-x)>0$

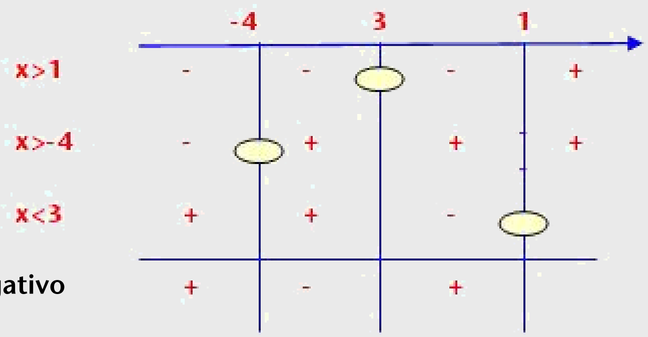
Per determinare l' insieme delle soluzioni della disequazione dobbiamo porre: ogni singolo fattore maggiore di zero, cioè studiare il segno di ogni fattore

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$3-x>0 \Rightarrow x<3$

Riportiamo sopra una retta orientata i valori trovati, e tracciamo in corrispondenza delle linee verticali. Riportiamo l' insieme di soluzione di ogni singolo fattore ponendo il segno positivo, dove è maggiore di zero, e il negativo nel verso opposto. Tracciamo al termine una linea orizzontale e



La disequazione è verificata per: $x<-4 \vee 3<x<1$

La disequazione è in senso stretto quindi, non si accettano le soluzioni dell' equazione. In corrispondenza di tali soluzioni, nel grafico, poniamo un pallino vuoto.

Risolvere le seguenti disequazioni letterali intere:

26. $(x+2)(x+3)>0$ $[x<-3 \vee x>-2]$

27. $(x-2)(x+5)(6-x)\geq 0$ $[x\leq -5 \vee 2\leq x\leq 6]$

28. $(x+2)(x+3)\geq 0$ $[x\leq -3 \vee x\geq -2]$

29. $(x^2-4)(x-5)\leq 0$ $[x\leq -2 \vee 2\leq x\leq 5]$

30. $(2-x)(x+2)\leq 0$ $[x\leq -2 \vee x\geq 2]$

31. $(x^2+5x)(7-x)\geq 0$ $[x\leq -5 \vee 0\leq x\leq 7]$

32. $x(x-2)>0$ $[x<0 \vee x>2]$

33. $(x^2+5x+6)(x^2-3x+2)>0$ $[x<-3 \vee -2<x<1 \vee x>2]$

34. $(x^2+5x+6)(x^2+3x+2)<0$ $[-3<x<-1 \wedge x\neq -2]$

35. $(x^2+5x+6)(8-x)<0$ $[-2<x<-3 \vee x>8]$

36. $x^3+7x^2+12x\geq 0$ $[-4\leq x\leq -3 \vee x\geq 0]$

37. Se la disequazione $B(x) \geq 0$ ammette come soluzioni $x \leq 5$,che soluzioni ha la disequazione

$B(x)(x-1)(x+6) \geq 0$ [$x \leq -6 \vee 1 \leq x \leq 5$]

38. Se la disequazione $B(x) < 0$ ammette come soluzioni $x > 3$,che soluzioni ha la disequazione

$B(x)(x-\sqrt{2})(x+5) \geq 0$ [$x \leq -5 \vee \sqrt{2} \leq x < 3$]

Disequazioni di II grado

Ricordiamo

$\Delta > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1 \wedge x > x_2$	Se a **concorde** con il verso della disequazione, soluzioni esterne all'intervallo delle radici
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$	Se a **discorde** con il verso della disequazione, soluzioni interne all'intervallo delle radici
$\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\forall x \in R, x \neq -\frac{b}{2a}$	Se a **concorde** con il verso della disequazione, è verificata per qualsiasi valore di x, escluso il valore che verifica l'equazione
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\overline{\exists} x \in R$	Se a **discorde** con il verso della disequazione, non ammette nessuna soluzione
$\Delta < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\forall x \in R$	Se a **concorde** con il verso della disequazione, è verificata per qualsiasi valore di x
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\overline{\exists} x \in R$	Se a **discorde** con il verso della disequazione, non ammette nessuna soluzione

Disequazioni numeriche intere

Esercizio guida

Risolvere la disequazione $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

Troviamo le radici dell'equazione di secondo grado associata cioè $x^2 + 3x - 4 = 0$

il $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$ **essendo** $\Delta > 0$ **l'equazione ammette due soluzioni** $x_1 = -4$ **e** $x_2 = 1$

Dato che *a* è discorde con il verso della disequazione , le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici dell'equazione associata.

La disequazione è verificata

$$-4 \leq x \leq 1$$

Risolvere le seguenti disequazioni :

39. $5x^2 \geq 0$ $[\forall x \in R]$

40. $-3x^2 \geq 0$ $[x = 0]$

41. $-7x^2 < 0$ $[\forall x \in R, x \neq 0]$

42. $x^2 - 2x > 0$ $[x < 0 \vee x > 2]$

43. $2x - x^2 > 0$ $[0 < x < 2]$

44. $x^2 - 4x \geq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 4]$

45. $x^2 + 9 > 0$ $[\forall x \in R]$

46. $x^2 - 9 > 0$ $[x < -3 \vee x > 3]$

47. $-x^2 + 5x > 0$ $[0 < x < 5]$

48. $-x^2 + 9 > 0$ $[-3 < x < 3]$

49. $x^2 + 2 > 0$ $[\forall x \in R]$

50. $x^2 - 4 > 0$ $[x < -2 \vee x > 2]$

51. $4 - x^2 > 0$ $[-2 < x < 2]$

52. $x^2 - 5 > 0$ $[x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}]$

53. $x^2 - 4x - 21 < 0$ $[-3 < x < 7]$

54. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ $[x = 5]$

55. $x^2 + 5x + 6 > 0$ $[x < -3 \vee x > -2]$

56. $x^2 - 2x + 2 > 0$ $[\forall x \in R]$

57. $x^2 + 2x + 3 < 0$ $[\nexists x \in R]$

58. $x^2 - 2x - 2\sqrt{2} - 2 > 0$ $[x < -\sqrt{2} \vee x > 2 + \sqrt{2}]$

59. $(x^2 - 2)(x + 2) - x(x + 2)^2 + 6x^2 > 0$ $[x < -\frac{1}{2} \vee x > 2]$

60. $(x - 2)^3 - (x - 3)^2(x + 1) > 16x$ $[2 < x < 7]$

61. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(x-1)^2}{6} < \frac{7}{12}x$ $[\frac{7}{11} < x < 5]$

62. Scrivi una disequazione di II grado la cui soluzione è $-1 < x < 6$. $[x^2 - 5x - 6 < 0]$

63. Scrivi una disequazione di II grado verificata per $x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$ $[2x^2 - x > 0]$

64. Scrivi una disequazione verificata solo per x=4. $[x^2 - 8x + 16 \leq 0]$

65. Scrivi una disequazione verificata per $\forall x \in R, x \neq \frac{3}{2}$ $[4x^2 - 12x + 9 > 0]$

Scegli la risposta esatta

1. **La disequazione** $ax^2+bx+c<0$ **se** $a<0 \wedge \Delta<0$**, è verificata per:**
   - ☐ valori interni all' intervallo delle radici;
   - ☐ valori esterni all' intervallo delle radici;
   - ☐ per qualsiasi valore reale di x;
   - ☐ per nessun valore reale di x

2. **La disequazione** $ax^2+bx+c<0$ **se** $a<0 \wedge \Delta=0$**, è verificata per:**
   - ☐ per qualsiasi valore reale di x, escluso il valore che annulla il trinomio;
   - ☐ valori esterni all' intervallo delle radici;
   - ☐ per qualsiasi valore reale di x;
   - ☐ per nessun valore reale di x;

3. **La disequazione** $ax^2+bx+c<0$ **se** $a<0 \wedge \Delta>0$**, è verificata per:**
   - ☐ valori interni all' intervallo delle radici;
   - ☐ valori esterni all' intervallo delle radici;
   - ☐ per qualsiasi valore reale di x;
   - ☐ per nessun valore reale di x

4. **La disequazione** $4x^2+4x+1\leq 0$**, è verificata per:**
   - ☐ $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$;
   - ☐ $\forall x\in R \wedge x\neq-\frac{1}{2}$
   - ☐ $x=\frac{1}{2}$
   - ☐ $\nexists x\in R$

Disequazioni letterali intere

Esercizio guida

Svolgere la seguente disequazione

$$x^2 - kx + k^2 + 3k > 0$$

Per determinare l' insieme delle soluzioni della disequazione dobbiamo calcolare il discriminante dell' equazione associata:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = k^2 - 4k^2 - 12k = -3k^2 - 12k$

Discussione

Le soluzioni della disequazione dipenderanno dal segno del discriminante.

- $\Delta > 0 \rightarrow -3k^2 - 12k > 0 \Rightarrow -4 < k < 0$

  L' equazione associata ammette due soluzioni reali e distinte.

  $x_1 = \frac{k - \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2} \vee x_2 = \frac{k + \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2}$

  a>0, verso della disequazione è concorde. La disequazione è verificata per valori esterni all' intervallo delle radici

  $x < \frac{k - \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2} \vee x > \frac{k + \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2}$

- $\Delta = 0 \rightarrow -3k^2 - 12k = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = -4$

  a>0, verso della disequazione è concorde. La disequazione è verificata per qualsiasi valore di x, ad esclusione della radice dell' equazione associata.

  Sostituiamo i valori di k trovati:

  $k = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

  La disequazione è verificata $\forall x \in R, x \neq 0$

- $\Delta < 0 \rightarrow -3k^2 - 12k < 0 \Rightarrow k < -4 \vee k > 0$

  a>0, verso della disequazione è concorde. La disequazione è verificata per qualsiasi valore di x.

Riepilogo

a. $-4 < k < 0 \rightarrow x < \frac{k - \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2} \vee x > \frac{k + \sqrt{-3k^2 - 12k}}{2}$

b. $k = -4 \rightarrow \forall x \in R, x \neq 2$ **o** $k = 0 \rightarrow \forall x \in R, x \neq 0$,

c. $k < -4 \vee k > 0 \rightarrow \forall x \in R$

Risolvere le seguenti disequazioni :

66. $x^2 - 3ax + 2a^2 > 0, a > 0$ $[x < a \vee x > 2a]$

67. $x^2 - (a-1)x - a > 0$ $[a < -1 \Rightarrow x < a \vee x > -1; a = -1 \Rightarrow \forall x \in R, x \neq -1; a > -1 \Rightarrow x < -1 \vee x > a]$

68. $a(x-1)^2 - ax - 2 \geq 0, a > 0$

$$\left[0 < a < \frac{8}{3} \Rightarrow x \leq \frac{a - \sqrt{8a - 3a^2}}{2a} \vee x \geq \frac{a + \sqrt{8a - 3a^2}}{2a}; a = \frac{8}{3} \Rightarrow \forall x \in R; a > \frac{8}{3} \Rightarrow \forall x \in R\right]$$

69. $ax^2 - 2(a+1)x + 1 \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow x < \dfrac{a+1-\sqrt{a^2+a+1}}{a} \vee x > \dfrac{a+1-+\sqrt{a^2+a+1}}{a}; \\ a < 0 \Rightarrow \dfrac{a+1-\sqrt{a^2+a+1}}{a} < x < \dfrac{a+1+\sqrt{a^2+a+1}}{a} \end{array}\right]$$

70. $ax^2 - (a-2)x - a \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} a < 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{a-2-\sqrt{5a^2-4a+4}}{2a} \vee x \geq \dfrac{a-2+\sqrt{5a^2-4a+4}}{2a}; \\ a > 0 \Rightarrow \dfrac{a-2-\sqrt{5a^2-4a+4}}{2a} \leq x \leq \dfrac{a-2+\sqrt{5a^2-4a+4}}{2a} \end{array}\right]$$

71. $x^2 - (a-3)x + a - 2 \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} a < \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \vee a > \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \dfrac{a-3-\sqrt{a^2-7a+11}}{2} \leq x \leq \dfrac{a-3+\sqrt{a^2-7a+11}}{2}; \\ a = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \vee a = \dfrac{7\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{\exists} x \in R \\ \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{\exists} x \in R \end{array}\right]$$

72. $x^2 - (a+3)x \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} a > -3 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq a+3; \\ a = -3 \Rightarrow \forall x \in R \\ a < -3 \Rightarrow x \leq a+3 \vee x \geq 0 \end{array}\right]$$

73. $x^2 - 2a^2 + 1 \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \leq -\sqrt{2a^2-1} \vee x \geq \sqrt{2a^2-1}; \\ a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \forall x \in R \\ a < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee a > -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \forall x \in R \end{array}\right]$$

Disequazioni Fratte

Esercizio guida

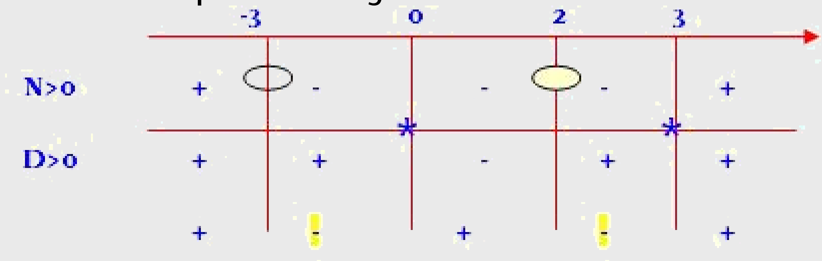
Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x}<0$

Poniamo

$N>0 \Rightarrow x^2-9>0 \Rightarrow x<-3 \wedge x>3$

$D>0 \Rightarrow x^2-2x>0 \Rightarrow x<0 \wedge x>2$

Riportiamo nel grafico le soluzioni trovate:



La disequazione è verificata

$$-3<x<0 \wedge 2<x<3$$

*** utilizziamo questo simbolo per indicare che il Denominatore non può mai essere nullo**

Risolvere le seguenti disequazioni :

74. $\dfrac{x+1}{x-1}-3<\dfrac{2-x}{x}$ $[x<-1 \vee 0<x<1 \vee x>2]$

75. $\dfrac{x}{x-2}\geq 0$ $[x \leq 0 \vee x > 2]$

76. $\dfrac{x+2}{x+3}\geq 0$ $[x < -3 \vee x \geq -2]$

77. $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2}\geq 0$ $[x \leq 1 \vee x \geq 2]$

78. $\dfrac{x+1}{x+2} > 2$ $[-3 < x < -2]$

79. $\dfrac{x-2}{x}\geq 0$ $[x<0 \vee x\geq 2]$

80. $\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{2}{x+3}$ $[x < -3 \vee -1 < x < 1]$

81. $\dfrac{x+2}{x+3}\leq 0$ $[-3<x<-2]$

82. $\dfrac{x^2+9}{x} < 0$ $[x < 0]$

83. $\frac{x^2+4x+4}{x+1}<0$ [$x<-1 \wedge x\neq -2$]

84. $\frac{x^2-4}{x^2+2}>0$ [$x<-2 \vee x>2$]

85. $\frac{(2x-1)^2}{x^2+2x}\leq 0$ [$-2<x<0, x=\frac{1}{2}$]

86. $\frac{x-2}{x+2}>0$ [$x<-2 \vee x>2$]

87. $\frac{x+2}{x-2}\geq 0$ [$x<-2 \vee x>2$]

88. $\frac{x^2+2x}{x}\geq 0$ [$x\geq -2 \wedge x\neq 0$]

89. $\frac{x^2-12x+32}{x^2+2x+4}>0$ [$x<4 \vee x>8$]

90. $\frac{2x+7}{x-3}-\frac{1}{3-x}>\frac{x^2}{x^2-9}$ [$x<-12 \vee -3<x<-2 \vee x>3$]

91. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}\geq 0$ [$x\neq -2$]

92. $\frac{x^2+5}{x^2+3}\geq 0$ [$\forall x\in R$]

93. $\frac{x^2+5x+6}{x+9}>0$ [$-9<x<-3 \vee x>-2$]

94. $\frac{1}{2x+2}-\frac{x}{2x-2}>\frac{x+2}{x^2-1}$ [$-1<x<1$]

95. $\frac{10}{3}<\frac{x+5}{x-5}-\frac{5-x}{x+5}$ [$-10<x<-5 \vee 5<x<10$]

96. $\frac{x^2+5x+6}{x+3}>0$ [$x>-2$]

97. $\frac{x^2+6x+9}{x^2+1}>0$ [$x\neq -3$]

98. $\frac{3x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}<\frac{3}{2}$ [$-5<x<0 \vee 1<x<2$]

99. $\frac{x^2+4x+4}{x+2}<0$ [$x<-2$]

100. $\frac{4-x}{x^2+2x+1}-\frac{2-x}{x+1}>2$ $[-6<x<0, x\neq -1]$

101. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}>0$ $[x<-3 \vee x>-1]$

102. $\frac{x^2+5x+4}{4x^2+4x+1}>0$ $[x<-4 \vee x>-1 \wedge x\neq -\frac{1}{2}]$

103. $\frac{x^2+6x+9}{x^2}\geq 0$ $[x\neq 0]$

104. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}<0$ $[-4<x<-3 \vee -2<x<-1]$

105. $\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}>0$ $[x<-3 \vee -2<x<-1 \vee x>0]$

106. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}<0$ $[-3<x<-1 \wedge x\neq -2]$

107. $\frac{2x+9}{x+3}-2>\frac{x+2}{2-x}$ $[x<-8 \vee -3<x<0 \vee x>2]$

108. $\frac{x+3}{2}+\frac{16-2x}{2x-5}\leq 13$ $[x<\frac{5}{2} \vee 3\leq x\leq \frac{49}{2}]$

109. $\frac{(x-2)(2x+1)}{x^4+x^2+1}>0$ $[x<-\frac{1}{2} \vee x>2]$

110. $\frac{x^2+4x+4}{x+2}\leq 0$ $[x<-2]$

111. $\frac{x^2+2x}{x+2}\leq 0$ $[x\leq 0 \wedge x\neq -2]$

112. $\frac{4-x^2}{x^4-x^2}<0$ $[x<-2 \vee -1<x<1 \wedge x\neq 0 \vee x>2]$

113. $\frac{x+2}{4x^2-1}\leq \frac{1}{2x-1}$ $[-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}<x<1]$

114. $\frac{3}{3x+1}+\frac{6}{9x^2-1}\geq \frac{2}{3x-1}-1$ $[x\leq -\frac{1}{3} \vee x\geq \frac{1}{3}]$

115. Le disequazioni $(4x+5)(x-1)>0$ e $\frac{4x+5}{x-1}>0$ sono equivalenti? Motiva la risposta.

116.Le disequazioni $(2x-5)(x+1) \geq 0$ e $\frac{2x-5}{x+1} \geq 0$ sono equivalenti? Motiva la risposta.

Completa

A. $\frac{x^2}{x^2+2} \geq 0$ per ....

B. $\frac{x^3}{x^2+1} < 0$ per ....

C. $\frac{(x+1)^2}{2x-5} \geq 0$ per ....

D. $\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^2 > 0$ per ....

E. x^2............$16 < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

F. $-x^2$............$5 < 0 \Rightarrow \forall x \in R$

G. x^2............$9 > 0 \Rightarrow x < -3 \vee x > 3$

H. x^2.+......x+..... $< 0 \Rightarrow -7 < x < -4$

I. x^2.−......x+..... $\geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \vee x \geq 4$

J. $x^2.+x+2$.......$0 \Rightarrow \forall x \in R$

Sistemi di disequazioni

Esercizio guida

Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases}$

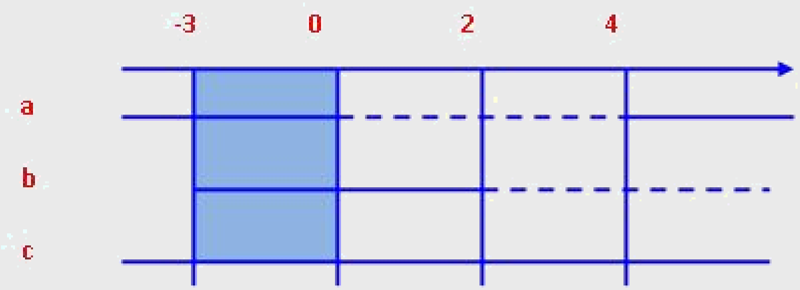
Svolgiamo singolarmente le disequazioni:

a) $x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \wedge x \geq 4$

b) $x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow -3 < x < 2$

c) $x^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$

Riportiamo nel grafico le soluzioni trovate:



Il sistema è verificato

$$-3 < x < 0$$

Risolvere i seguenti sistemi:

117. $\begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ x^2 + 3 < 0 \end{cases}$ $[\nexists x \in R]$

118. $\begin{cases} x^2 - 25 > 0 \\ x^2 + 3x > 0 \end{cases}$ $[x < -5 \vee x > 5]$

119. $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$ $[1 < x < 3]$

120. $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x^2 + x + 3 < 0 \end{cases}$ $[\nexists x \in R]$

121. $\begin{cases} x^2 + 8x + 16 \leq 0 \\ x^2 - 17 < 0 \end{cases}$ $[x = -4]$

122. $\begin{cases}(2x+3)(3x-2)-4x(2x+1)+16\leq 0\\(x+4)^2-(2x-1)^2>8x\end{cases}$ $\left[\frac{5}{2}<x<3\right]$

123. $\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+2}\leq 0\\4x^2-20>0\end{cases}$ $\left[x\leq -3\vee\sqrt{5}<x\leq 3\right]$

124. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+4}>0\\6x^2+x-1>0\end{cases}$ $\left[-4<x<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{1}{3}\right]$

125. $\begin{cases}(x-2)\cdot(x+3)\geq x+(x-1)\cdot(x+1)\\(x-1)^3\leq x^2\cdot(x-3)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}x+1\right)\end{cases}$ $[\nexists x\in R]$

126. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\leq 0\\x^2+x\geq 0\end{cases}$ $[x=0]$

127. $\begin{cases}\dfrac{8-x}{2}-\dfrac{2x-11}{x-3}>\dfrac{x+6}{2}\\\dfrac{x}{x-3}>\dfrac{5x+3}{x^2-9}\end{cases}$ $[x<-3\vee 3<x<4]$

128. $\begin{cases}\dfrac{x-3}{5}-\dfrac{x+4}{2}\geq\dfrac{x-22}{10}\\(3x+1)^2-(x-2)(x+2)>2(2x-3)(2x+3)\\\dfrac{(2-x)(3+x)}{3}>\dfrac{x(2-x)}{2}+\dfrac{1}{6}x^2\end{cases}$ $\left[-\frac{23}{6}<x<-\frac{3}{2}\right]$

129. $\begin{cases}2\cdot(x+1)+(-2)^2\cdot x>3\cdot(2x-3)\\\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(2x-1)^2}{16}<\dfrac{35}{16}\end{cases}$ $[x>0]$

130. $\begin{cases}15x^2-5x\leq 0\\x^2\geq 0\\-(x-1)<0\end{cases}$ $[\nexists x\in R]$

131. $\begin{cases}12x^2-3x<0\\2x^2\geq 0\\-(x-2)<0\end{cases}$ $[\nexists x\in R]$

132. $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{x-3} < 0 \\ \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{x-3}{x-2} \geq 0 \end{cases}$ [$-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 3$]

133. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ [$x > -1$]

134. $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+4} \leq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ [$\nexists x \in R$]

135. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2} \leq 0 \\ x^2+4 > 0 \end{cases}$ [$x \leq -2$]

136. Un trapezio isoscele ha i lati obliqui che misurano (x+2), la base maggiore misura 8x e a base minore 2x-1. Determinare i valori di x affinché il perimetro sia maggiore al massimo uguale a 8. [$x > \frac{1}{2}$]

137. Determinare per quali valori di k l'equazione $(3-k)x + 4 = 2k(1-x) + 1$ ammette soluzioni comprese tra - 1 e 5. [$k < -6 \vee k > 0$]

138. Determinare per quali valori di k l' equazione $2kx^2 - 2(k-1)x + k + 3 = 0$ ammette soluzioni reali e concordi. [$-4-\sqrt{17} < k < -3 \vee 0 < k < -4+\sqrt{17}$]

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esercizio guida

Risolvere la seguente disequazione di grado superiore al secondo $x^3 - x^2 - 12x + 24 > 0$

Per determinare l' insieme delle soluzioni di una disequazione di grado superiore al secondo, dobbiamo scomporre in fattori primi il polinomio. Utilizziamo il Teorema di Ruffini e otteniamo:

$$(x-2)(x^2 + x - 12) > 0$$

poniamo ogni fattore maggiore di zero

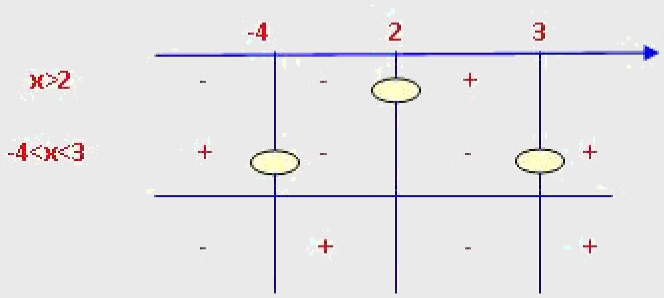
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow x < -4 \vee x > 3$

Riportiamo sopra una retta orientata i valori trovati, e tracciamo in corrispondenza delle linee verticali.

Riportiamo l'insieme di soluzione di ogni singolo fattore ponendo il segno positivo, dove è maggiore di zero, e il negativo nel verso opposto.

Tracciamo al termine una linea orizzontale e



La disequazione è verificata per: $-4 < x < 2 \vee x > 3$

Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo:

139. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$ $[1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3]$

140. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \leq 0$ $[x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 3]$

141. $x^3 + x^2 - 3x - 3 \geq 0$ $[-\sqrt{3} \leq x \leq -1 \vee x \geq \sqrt{3}]$

142. $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$ [$x < -1$ v$1 < x < 2$]

143. $6x^2 - x^3 - 9x \leq 0$ [$x \geq 0$]

144. $x^3 + 8 \leq 0$ [$x \leq -2$]

145. $x^4 + 10x^3 > 0$ [$x < -10$ e $x > 0$]

146. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 > 0$ [$x > 5$]

147. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 > 0$ $[x < -3 \vee x > -2]$

148. $x^4 + x^3 + x^2 \leq 0$ $[x = 0]$

149. $x^3 - 3x + 2 \le 0$ $[\, x \le -2 \vee x = 1 \,]$

150. $x^4 - 5x^2 + 4 \le 0$ $[\, -2 \le x \le -1 \vee 1 \le x \le 2 \,]$

151. $16x^2 - x^4 < 0$ $[-4 < x < 0 \vee 0 < x < 4]$

152. $(x^2 + 3x + 6)(x^2 - 5) > 0$ $[x < 5 \vee x > 5]$

153. $x^4 - 8x^2 + 16 \le 0$ $[x = -2 \vee x = 2]$

154. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$ $[x < -1 \vee 1 < x < 2 \vee x > 3]$

155. $x^4 - x^3 - 12x^2 < 0$ $[\, -3 \le x \le 4 \wedge x \ne 0 \,]$

156. $3x^3 - 5x^2 - 2x \ge 0$ $[\, -\frac{1}{3} \le x \le 0 \vee x \ge 2 \,]$

157. $x^4 - 5x^2 - 36 > 0$ $[\, x < -3 \vee x > 3 \,]$

158. $x^4 + x^2 - 2 > 0$ $[\, x < -1 \vee x > 1 \,]$

159. $x^4 + x^2 - 6 < 0$ $[\, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \,]$

160. $x^3+2x^2-3x = 0$ $[x \le -3 \vee 0 \le x \le 1]$

161. $x^4 - 5x^2 + 4 \le 0$ $[-2 \le x \le -1 \vee 1 \le x \le 2\,]$

162. $x^4 - x^3 - 20x^2 < 0$ $[\, -4 \le x \le 5 \wedge x \ne 0 \,]$

163. $(x-3)^3(x^2 - 16) \ge 0$ $[\, -4 \le x \le 3 \vee x \ge 4 \,]$

164. $20x^3 + 61x^2 + 61x + 20 \ge 0$ $[\, x \ge 1 \,]$

165. $(x-1)(x^2+1)(x^3-4x) > 0$ $[x < -2 \vee 0 < x < 1 \vee x > 2]$

166. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^4 + x^{10}} < 0$ $[\, \nexists x \in R \,]$

167. $\dfrac{(x-1)^3}{x^2 + x + 5} \ge 0$ $[\, x \ge 1 \,]$

168. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x + 2} \ge 0$ $[\, x < -2 \vee 0 \le x \le 1 \vee x \ge 4 \,]$

169. $\dfrac{x^4 - 1}{x^2 + x + 5} \ge 0$ $[\, x < -1 \vee x > 1 \,]$

170. $\dfrac{x^3 + 2x^2}{x^3 + 3x^2} \ge 0$ $[\, x < -3 \vee x > -2 \wedge x \ne 0 \,]$

171. $\dfrac{2x^3+x^2+4}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x}{1-x}\le 1$ $[\,x<1\,]$

172. $\dfrac{80(x^4-1)(x^2-x+10)(-x^2-10)}{13(1-x^2)(-x^2+x-5)(x^8+4)}<0$ $[\,\forall x\in\Re \wedge x\ne \pm 1\,]$

173. $\dfrac{x^2-2x^3-9+18x}{\left(x^2+3x-4\right)\left(9x^2-6x+1\right)}\le 0$ $[\,-4<x\le -3 \vee \dfrac{1}{2}\le x<1 \vee x\ge 3\,]$

174. $\dfrac{4(x^4-1)(x^2-2x+1)}{(1-x^2)(x^2-5x+6)}>0$ $[\,2<x<3\,]$

175. $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x+2}\ge 0$ $[\,x<-2 \vee x>-1\,]$

176. $\dfrac{x^2-2x^3-9+18x}{\left(x^4+3x^3-4x^2\right)}\le 0$ $[\,-3\le x<-1 \vee \dfrac{1}{2}\le x<1 \vee x\ge 3\,]$

177. $\dfrac{x^4+x^3-3x^2-4x-4}{x^3+3x^2+x+3}<0$ $[x<-3 \quad \vee \quad -2<x<2]$

178. $\dfrac{x^4-16}{x^4+x^3-x-1}\ge 0$ $[x\le -2 \ \vee -1<x<1 \vee \ x\ge 2]$

Disequazioni con valori assoluti

Equazioni con valori assoluti

Ricordiamo

Definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x \to x \geq 0 \\ -x \to x < 0 \end{cases}$$

Esercizio guida

Risolvere l'equazione $|x+3| = 2$

Ricordando la definizione di valore assoluto la seguente equazione diventa $x+3 = \pm 2$ **cioè:**

$x+3 = 2 \to x = -1$ **e** $x+3 = -2 \to x = -5$

Risolvere le seguenti equazioni:

179. $|x+3| = 0$ $[x = -3]$

180. $|3x^2 + 3x| = 0$ $[x = -1 \vee x = 0]$

181. $|x^2 + 3x + 2| = 0$ $[x = -2 \vee x = -1]$

182. $|x^2 + 3x + 2| + 2 = 0$ $[\nexists x \in R]$

183. $|x+3| = |3x-1|$ $[x = -1 \vee x = 2]$

184. $|x+5| = 6$ $[x = -11 \vee x = 1]$

185. $1 - |2x - x^2| = x$ $\left[x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

186. $|x - 3x^2| = 2 - 2x$ $[x = -1]$

187. $3 + x \cdot |3x+1| - |x+1| = 0$ $[x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \vee x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}]$

188. $x - |2-3x| = |1-x|$ $[x = \frac{3}{5} \vee x = 1]$

Disequazioni con valori assoluti

Ricordiamo

$|f(x)| < k, k \in R^+ \Rightarrow -k < f(x) < k$

Risolvere $-k < f(x) < k$ **equivale** a svolgere il sistema $\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$,

$|f(x)| > k, k \in R^+ \Rightarrow f(x) < -k \vee f(x) > k$

Risolvere $f(x) < -k \vee f(x) > k$ **equivale** a determinare

1. l'insieme S_1 delle soluzioni della disequazione $f(x) < -k$
2. l'insieme S_2 delle soluzioni della disequazione $f(x) > k$

L'insieme delle soluzioni di $|f(x)| > k, k \in R^+$ è $S = S_1 \cup S_2$

Esercizio guida

Risolvere l'equazione $|x^2 - 4x| < 1$

$$|x^2 - 3x| < 1 \Rightarrow -1 < x^2 - 3x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 < 0 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La disequazione è verificata per

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Esercizio guida

Risolvere l'equazione $|x^2 - 3x| > 1$

$$|x^2 - 3x| > 1 \Rightarrow x^2 - 3x < -1 \vee x^2 - 3x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La disequazione è verificata per: $x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Risolvere le seguenti disequazioni:

189. $|x^2 - 2x| < 1$ $[1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}, x \neq 1]$

190. $|x^2 - 2x| \geq 1$ $[\nexists x \in R]$

191. $\frac{2}{|3x|} > \frac{1}{2}$ $[-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}]$

192. $\left|\dfrac{x-3}{2x+1}\right| < 2$ $\left[x < -\dfrac{5}{3} \text{ e } x > \dfrac{1}{5}\right]$

193. $\left|x^2 - 8x + 7\right| \geq 7$ $[\, x \leq 0 \vee x \geq 8 \,]$

194. $\dfrac{2}{|3x-2|} < \dfrac{1}{2}$ $[\, x < -\dfrac{2}{3} \vee x > 2 \,]$

195. $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| - 1 < 0$ $[\, x \neq -2 \vee x \neq -1 \,]$

196. $\left|2 - \dfrac{x}{x+2}\right| - 1 < 0$ $[\, x < -3 \,]$

197. $3|x| < 1$ $[\, -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3} \,]$

198. $\left|x^2 - 4\right| \leq 4$ $[\, -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \,]$

199. $\left|\dfrac{|x+1| - 2}{2}\right| \leq 3$ $[\, -9 \leq x \leq 7 \,]$

200. $\left|x^2 - 1\right| < 5$ $[\, -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \,]$

201. $\left|x^2 + x + 3\right| > 2$ $[\, \forall x \in R \,]$

202. $\left|x^2 - 2x\right| < 1$ $[\, 1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5} \wedge x \neq 1 \,]$

203. $\left|\dfrac{x^2 - 3}{x}\right| \geq 2$ $[\, x \leq -3 \vee -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 3 \wedge x \neq 0 \,]$

Completa

A. $\left|1-x^2\right|>0$ **per** ....

B. $\left|x^2-4\right|\geq 0$ **per** ....

C. $\left|1-x^2\right|+1>0$ **per** ....

D. $\left|\frac{1}{x+1}\right|+2>0$ **per** ....

E. $\left|4-x^2\right|+\left|x+2\right|>0$ **per** ....

F. $\left|x^2-7x+12\right|+\left|x-4\right|\leq 0$ **per** ....

G. $\left|4-x^2\right|+\left|x+2\right|\leq 0$ **per** ....

H. $\left|x^2-7x+12\right|+\left|x-4\right|>0$ **per** ....

I. $\frac{\left|1-x^2\right|}{x}>0$ per ....

J. $\left|\frac{2-x}{x}\right|>0$ per ....

K. $\left(x+\left|x\right|\right)^2>0$ per ....

L. $\left|x^3-7x^2\right|+\left|x^2-4x\right|\leq 0$ per ....

Disequazioni aventi tra i loro termini i valori assoluti di una o più espressioni contenente l' incognita

Esercizio guida

Risolvere l'equazione $|x+3|-4x+2\geq 0$

Spostiamo al II membro i termini fuori dal valore assoluto

$|x+3|\geq 4x-2$ **Applichiamo la definizione di valore assoluto e otteniamo:**

$$A)\begin{cases} x+3\geq 0 \\ x+3\geq 4x-2 \end{cases} \cup B)\begin{cases} x+3<0 \\ -x-3\geq 4x-2 \end{cases}$$

Svolgiamo i due sistemi e otteniamo

$S_A : -3\leq x\leq \frac{5}{3}$ e $S_B : x<-3$

La disequazione è verificata per $S=S_A\cup S_B \rightarrow x\leq \frac{5}{3}$

Risolvere le seguenti disequazioni:

204. $|x+1|-x+2\geq 0$ [$\forall x\in R$]

205. $|x+1|-x+2\leq 0$ [$\nexists x\in R$]

206. $|x+2|-3x+1>0$ [$x<\frac{3}{2}$]

207. $|-2x+1|-x+3\geq 0$ [$\forall x\in R$]

208. $3(1-|x|)^2-3|x|<1$ [$\nexists x\in R$]

209. $\frac{2}{x+3}<\frac{3}{|x-2|}$ [$x<-13\vee x>-1\wedge x\neq 2$]

210. $|x^2-4|>4+2x$ [$x<0\vee x>4$]

211. $3+x-|x^2-5x+6|\geq 4$ [$3-\sqrt{2}\leq x\leq 3+\sqrt{2}$]

Esercizio guida

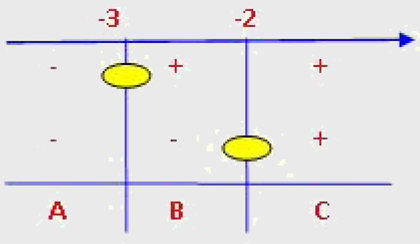
Risolvere l'equazione $|x+3|-|x+2|-2\geq 0$

Poniamo ogni espressione contenuta nel valore assoluto maggiore di zero:

$x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$

$x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$

Riportiamo in una tabella



Otteniamo i seguenti sistemi:

$$A)\begin{cases} x\leq -3 \\ -x-3+x+2-2\geq 0 \end{cases} \cup B)\begin{cases} -3<x<-2 \\ x+3+x+2-2\geq 0 \end{cases} \cup C)\begin{cases} x\geq -2 \\ x+3-x-2-2\geq 0 \end{cases}$$

Svolgiamo i sistemi e otteniamo

$S_A : \nexists x\in R$ **e** $S_B : \nexists x\in R$ **e** $S_C : \nexists x\in R$

La disequazione è verificata per $S=S_A\cup S_B\cup S_C \rightarrow \nexists x\in R$

Risolvere le seguenti disequazioni:

212. $|x+1|-x+2<4-|x+1|$ $[-\frac{4}{3}<x<0]$

213. $|x+3|+|x-2|<3x$ $[x>\frac{5}{3}]$

214. $|x+1|-|x-2|+2x\geq 0$ $[x\geq \frac{1}{4}]$

215. $|2x-1|-|x-3|-2<0$ $[\frac{1}{2}\leq x<2]$

216. $|x+4|-|x-1|+4\geq 0$ $[x\geq -\frac{7}{2}]$

217. $2|x-3|-|x-2|+1\geq 0$ $[\forall x\in R]$

Disequazioni Irrazionali

Condizioni di esistenza

Ricordiamo

Radicali di indice pari → condizioni di esistenza: radicando maggiore o uguale a zero.

Radicali di indice dispari → condizioni di esistenza: esistono per qualsiasi valore reale.

Esercizio guida

Calcolar le condizioni di esistenza dei seguenti radicali

a) $\sqrt{x^2-4}$

b) $\sqrt[3]{x^2-2x}$

a) Si tratta di un radicale con radice di indice pari quindi la condizione di esistenza è porre il radicando maggiore o uguale a zero cioè $x^2-4\geq 0$ **da cui** $x\leq -2 \vee x\geq 2$

B) Si tratta di un radicale con radice di indice dispari quindi qualsiasi valore viene dato alla variabile il radicale esiste sempre la soluzione è $\forall x\in R$

Calcolare le condizioni di esistenza dei seguenti radicali:

218. $\sqrt{x+1}$ $[x\geq -1]$

219. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ $[-1\leq x<0]$

220. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $[x\geq 0]$

221. $\sqrt{x^2-4}+\sqrt[3]{x}$ $[x\leq -2 \vee x\geq 2]$

222. $\sqrt[3]{x+2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $[x\neq 0]$

Disequazioni irrazionali semplici

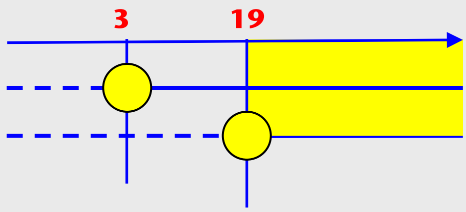
Esercizio guida

Risolvere la disequazione $\sqrt{x-3} \geq 4$

Osservazioni
Il primo membro è un radicale di indice pari che, esiste solo se il radicando è maggiore al massimo uguale a zero.
Il secondo membro della disequazione è un numero positivo.

Per svolgere la disequazione irrazionale dobbiamo porre la condizione di esistenza del radicando, ed elevare al quadrato entrambi i membri. Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 19 \end{cases} \Rightarrow x \geq 19$$



La disequazione è verificata per $x \geq 19$

Risolvere le seguenti disequazioni:

223. $\sqrt{x+3} \geq 2$ $[x \geq 1]$

224. $\sqrt{x^2-3x} > -10$ [x<0 v x>3]

225. $\sqrt{2x-1} \leq 3$ $[\frac{1}{2} \leq x \leq 4]$

226. $\sqrt{x^2-9} > -5$ $[x \leq -3 \vee x \geq 3]$

227. $\sqrt{2x-5} > 6$ [x > 41/2]

228. $\sqrt{4x} < 8$ $[0 \leq x < 16]$

229. $\sqrt{5x+6} > 3$ $[-\frac{6}{5} < x < \frac{3}{5}]$

230. $\sqrt{7x-8} > 2$ [x > 12/7]

231. $\sqrt{x^2-1} \leq 3$ $[-\sqrt{10} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{10}]$

232. $\sqrt{-x^2+2} \geq 2$ $[\nexists x \in R]$

233. $\sqrt{\dfrac{2x-1+x-1}{x-3}} > 1$ $[x > 3]$

234. $\sqrt{x^2-4x+3} > 0$ [x<1 v x>3]

235. $\sqrt[3]{x^3+3x^2}<1+x$ [x > - 1/3]

Disequazioni con due radicali

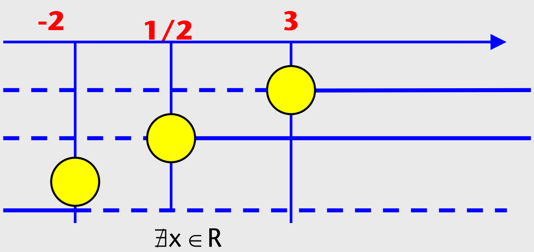
Esercizio guida

Risolvere la disequazione $\sqrt{x-3}\ge\sqrt{2x-1}$

Osservazioni
Il primo e il secondo membro sono radicali di indice pari che, esistono solo se i radicandi sono maggiori o al massimo uguale a zero.

Per svolgere la disequazione irrazionale dobbiamo porre le condizioni di esistenza dei radicandi, ed elevare al quadrato entrambi i membri. Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases}x-3\ge 0\\2x-1\ge 0\\x-3\ge 2x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\x\ge\frac{1}{2}\\-x\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 3\\x\ge\frac{1}{2}\\x\le -2\end{cases}\Rightarrow$$



La disequazione non è verificata per nessun valore reale di x.

Risolvere le seguenti disequazioni:

236. $\sqrt{3x-2}\ge\sqrt{x-1}$ $[x\ge 1]$

237. $\sqrt{x^2-3}\le\sqrt{2x^2+1}$ $[x\le-\sqrt{3}\vee x\ge\sqrt{3}]$

238. $\sqrt{2x^2-2x}\le\sqrt{x^2-4x}$ $[x\le -2\vee x\ge 4]$

239. $\sqrt{x^2-2x+3}<\sqrt{x^2-4x+1}$ $[x<-1]$

240. $\sqrt{\frac{x-2}{x+5}}\ge\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$ $[x>5]$

241. $\sqrt{3x-2}<\sqrt{x^2+2}$ $[\nexists x\in R]$

242. $\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x^2-9}$ $[3\le x\le\frac{1+\sqrt{41}}{2}]$

243. $\sqrt{x}+\sqrt{x+6}>0$ $[x>0]$

244. $\sqrt{3x+2}\ge 2\sqrt{x+1}$ $[\nexists x\in R]$

245. $\sqrt{1+x} < \sqrt{2x+3}$ $[x \geq -1]$

246. $\sqrt[3]{4x-7} \leq \sqrt[3]{2x-3}$ $[x \leq 2]$

247. $\sqrt[3]{4x+5} \geq \sqrt[3]{x}$ $[x \geq -\frac{5}{3}]$

Disequazioni dove compare un solo radicale

Ricordiamo

Indice dispari

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \vee \sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Rightarrow f(x) > [g(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \Rightarrow f(x) < [g(x)]^n$$

Indice pari

La disequazione $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ **è equivalente al sistema:**

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

La disequazione $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ **è equivalente a:**

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{V} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

Se S_1 è l' insieme di soluzioni del primo sistema e S_2 è l' insieme delle soluzioni del secondo sistema, l' insieme delle soluzioni della disequazione sarà : $S = S_1 \cup S_2$

Esercizio guida

Risolvere la disequazione $\sqrt{x^2-3x-4} \leq x+2$

Siamo nel caso $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ **. Svolgiamo**

$$\begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-3x-4 \leq x^2+4x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 4 \\ x \geq -2 \\ x \geq -\frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow -\frac{8}{7} \leq x \leq -1 \vee x \geq 4$$

La disequazione è verificata per $-\frac{8}{7} \leq x \leq -1 \vee x \geq 4$ **.**

Esercizio guida

Risolvere la disequazione $\sqrt{9(2x-1)} \geq 2x-1$

Siamo nel caso $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ **. Svolgiamo**

$$\begin{cases} 9(2x-1) \geq 0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 9(2x-1) \geq 4x^2-4x+1 \end{cases} \rightarrow A)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \cup B)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-22x+10 \leq 0 \end{cases}$$

Svolgiamo il sistema $A)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Svolgiamo il sistema $B)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-22x+10 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$

L' insieme delle soluzioni della disequazione è data da $S = S_A \cup S_B \rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$

Risolvere le seguenti disequazioni:

248. $\sqrt{x+2} \geq x-1$ $\quad [1 \leq x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$

249. $\sqrt{x+3} \geq -x+3$ $\quad [1 \leq x \leq 3]$

250. $\sqrt{x^2+2x} \geq x-4$ $\quad [x \geq 4]$

251. $2+x^2+\sqrt{x+2} > (x-1)^2$ $\quad [-1 < x \leq -\frac{1}{2}]$

252. $\sqrt{2x+1} < x-1$ $\quad [-\frac{1}{2} \leq x < 1 \vee x > 4]$

253. $\sqrt{x^2-4} > x-3$ $\quad [x \leq -2 \vee x \geq 2]$

254. $\sqrt{3x-1} < 6x-2$ $\quad [x > \frac{5}{12}]$

255. $\sqrt{x^2+7x+12} < x+4$ $\quad [\forall x \in R, x \neq -4]$

256. $\sqrt{x^2+1} < x+7$ $\quad [x < -7 \vee x > -\frac{24}{7}]$

257. $\sqrt{2x^2+x} \le x+3$ $[\,x<-3 \vee \frac{5-\sqrt{61}}{2} \le x \le \frac{5+\sqrt{61}}{2}\,]$

258. $\sqrt{x^2-7x} > x+3$ [x < 9/13]

259. $\sqrt{8-x^2} < x+6$ $[\,-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\,]$

260. $\sqrt{x^2+3} < x+1$ [x > 1]

Esercizi di riepilogo

261. $x^3 - x^2 - 8x + 12 \geq 0$ $[x \geq -3]$

262. $\frac{2x+13}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} > \frac{x+1}{x-1}$ $[-1 < x < 1 \vee \frac{6}{5} < x < 2 \vee x > 5]$

263. $\frac{3x+11}{x+1} + \frac{2x-3}{2-x} + \frac{x+1}{1-x} < 0$ $[x < -1 \vee 1 < x < \frac{7}{5} \vee 2 < x < 3]$

264. $\sqrt[3]{4x-1} > 3$ [x>7]

265. $\sqrt{x-3} < -10$ $[\nexists x \in \Re]$

266. $\sqrt{1-x} > 7$ [x < - 48]

267. $|x^2 - 9x + 7| < 7$ [0<x<2 v 7<x<9]

268. $\frac{\sqrt{x}(7-x)}{|x^2 - 3x|} > 0$ $[0 < x < 7. x \neq 3]$

269. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x - 1$ $[x < \frac{5}{3}]$

270. $\sqrt{|x^2 - 4x|} > x$ $[x \leq 2]$

271. $\sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2}} \leq \frac{2}{x}$ $[-\sqrt{7} \leq x \leq -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{7}]$

272. $\sqrt{3x^2 - x} < x + 5$ $[\frac{11-\sqrt{321}}{4} < x \leq 0 \vee \frac{1}{3} \leq x < \frac{11+\sqrt{321}}{4}]$

273. $\frac{\sqrt{2x-1} - 2 + x}{|x-2|} > 0$ $[x > 1]$

274. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} > 2 \\ \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 1} \leq 0 \end{cases}$ $[3 \leq x \leq 4]$

275. $\begin{cases} 5x^3 - 6x^2 + 5x \leq 6 \\ x - \sqrt{x^2 - 3x} \leq 2 \end{cases}$ $[x \leq 0]$

276. $\dfrac{\sqrt{x-1}-|2+x|}{\sqrt{x}} \geq 0$ $[x < 0]$

277. $\sqrt{x^2-3x} \leq x+1$ $[-1 \leq x \leq -\frac{1}{5}]$

278. $\dfrac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}} > 1$ $[-1 \leq x \leq 0]$

279. $\sqrt{x^2+4} < 2-x$

280. $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4} > 0$

Stabilisci se sono vere o false le seguenti implicazioni

A. $\sqrt{x^2+4} > -1 \quad \rightarrow \quad x < -2 \vee x > 2$

☐ Vero

☐ Falso

B. $\sqrt{x-1} \prec 0 \quad \rightarrow \quad \forall x \in R$

☐ Vero

☐ Falso

C. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+3} > 0 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \Re$

☐ Vero

☐ Falso

D. $x^4-16 < 0 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \Re$

☐ Vero

☐ Falso

E. $\sqrt{x^2-2x}+1 > +1 \quad \rightarrow \quad \forall x \in R$

☐ Vero

☐ Falso

F. $\sqrt[3]{x^3-9} < -1 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \Re$

☐ Vero

☐ Falso

Completa

A. $\dfrac{|1-x^2|}{\sqrt{x}} > 0$ per ....

B. $\dfrac{|1+x^2|}{\sqrt{x^2+2}} > 0$ per ....

C. $\dfrac{|1+x^2|}{\sqrt{x^2+2}} > 0$ per ....

D. $\dfrac{|x|+1}{\sqrt{x^2+2}} \geq 0$ per ....

E. $|x| + \sqrt{x^2+1} > 0$ per ....

F. $\sqrt{x} + \sqrt{x^2-1} > 0$ per ....

G. $-x^2 - 4 > 0$ per ....

H. $|x+3| + 2|x| < 0$ per ....

I. $\sqrt{x} + 2|x| < 0$ per ....

J. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ per ....

K. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq 0$ per ....

L. $\sqrt[3]{x+2} \geq 0$ per ....

M. $\sqrt{2x-3} \geq 0$ per ....

N. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 0$ per ....

O. $x^2 + x + 4 \geq 0$ per ....

P. $\dfrac{x^2}{x^2+2} \geq 0$ per ....

Q. $\dfrac{x^3}{x^2+1} < 0$ per ....

R. $\dfrac{(x+1)^2}{2x-5} \geq 0$ per ....

S. $\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^2 > 0$ per ....

Scegli la risposta esatta

1. $|1-2x|+1<0$

   ☐ $\nexists x \in \Re$

   ☐ $\forall x \in R$

   ☐ $x<1 \vee x>3$

   ☐ $1<x<3$

2. $|x-2|>-4$

   ☐ $\nexists x \in \Re$

   ☐ $\forall x \in R$

   ☐ $x<-2 \vee x>6$

   ☐ $2<x<4$

3. $|2x+5|>0$

   ☐ $\nexists x \in \Re$

   ☐ $\forall x \in R$

   ☐ $x<-\frac{5}{2} \vee x>0$

   ☐ $-\frac{5}{2}<x<0$

4. $\sqrt{x^2+1}<-1$

   ☐ $\nexists x \in \Re$

   ☐ $\forall x \in R$

   ☐ $x<-1 \vee x>1$

   ☐ $-1<x<1$

5. $\sqrt{x^2+4}>-1$

   ☐ $\nexists x \in \Re$

   ☐ $\forall x \in R$

   ☐ $x<-2 \vee x>2$

   ☐ $-2<x<2$

6. $\sqrt{x} + 1 > -1$

- ☐ $\nexists x \in \Re$
- ☐ $\forall x \in R$
- ☐ $x > 2$
- ☐ $x > -1$

7. $|3x + 1| < 2$

- ☐ $\nexists x \in \Re$
- ☐ $\forall x \in R$
- ☐ $x < -\frac{1}{3} \vee x > 1$
- ☐ $-1 < x < \frac{1}{3}$

8. $|x - 2| > 1$

- ☐ $\nexists x \in \Re$
- ☐ $\forall x \in R$
- ☐ $x < 1 \vee x > 3$
- ☐ $1 < x < 3$

9. $\sqrt{x-1} > \sqrt{4-x}$

- ☐ $\nexists x \in \Re$
- ☐ $1 < x < \frac{5}{2}$
- ☐ $1 < x < 4$
- ☐ $\frac{5}{2} < x < 4$

10. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+3}>0$

- ☐ $\nexists x \in \Re$
- ☐ $\forall x \in R$
- ☐ $x<-3 \vee 0<x<3$
- ☐ $-3<x<0 \vee x>3$

Completita

A. x^2.............$16<0 \Rightarrow \nexists x \in R$

B. $-x^2$.............$5<0 \Rightarrow \forall x \in R$

C. x^2.............$9>0 \Rightarrow x<-3 \vee x>3$

D. $x^2.+$......$x+$.....$<0 \Rightarrow -7<x<-4$

E. $x^2.-$......$x+$.....$\geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \vee x \geq 4$

F. $x^2.+x+2$.......$0 \Rightarrow \forall x \in R$

Geometria Analitica

Piano Cartesiano

Sistema di coordinate su una retta

Ricordiamo

Presa una retta r orientata, su cui sono stati fissati un'origine O e un'unità di misura, definiamo **sistema di coordinate su una retta** la corrispondenza biunivoca tra i punti P e i numeri reali $x_P \in \Re$ detti **ascisse** dei punti **P**

Esercizio guida

Nella figura è disegnata una retta orientata r sulla quale e stato fissato un sistema di riferimento; determiniamo l'ascissa dei punti A, B, Q

Dato che il punto A si trova a sinistra di O la sua ascissa è negativa, mentre i punti B e Q sono a destra e la loro ascissa risulta quindi positiva rispetto all'orientamento della retta avremo perciò:

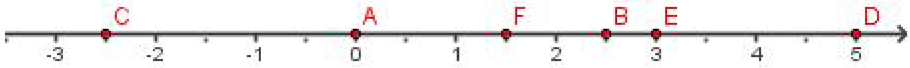
$x_A = -2 \Rightarrow A(-2)$ $x_B = 2 \Rightarrow B(2)$ $x_Q = 4 \Rightarrow Q(4)$

1. Disegna una retta orientata, prendi un'unità di misura e posiziona i seguenti punti:

$$A \to x_A = 3 \quad B \to x_B = -2 \quad C \to x_C = 0 \quad D \to x_D = -\frac{1}{2} \quad E \to x_E = \frac{5}{4} \quad F \to x_F = -1$$

$$G \to x_G = -\frac{2}{4} \quad H \to x_H = \frac{4}{3} \quad I \to x_I = -\frac{6}{3} \quad L \to x_L = \frac{1}{4} \quad M \to x_M = \frac{6}{4} \quad N \to x_N = \frac{7}{4}$$

2. Nella figura è disegnata una retta orientata r sulla quale è stato fissato un sistema di riferimento; determiniamo l'ascissa dei punti A, B, C, D, E, F



Distanza fra due punti sulla retta

Ricordiamo

$d(\overline{AB}) = x_A - x_B$ distanza orientata di A da B

$d(\overline{AB}) = x_B - x_A$ distanza orientata di B da A

$d(\overline{AB}) = | x_A - x_B |$ distanza assoluta di A da B

Esercizio guida

Calcoliamo la distanza tra A(-5) e B(3).

$d(\overline{AB}) = | x_A - x_B | = | -5 - 3 | = | -8 | = 8$

Quindi la distanza tra i punti A e B è 8

Calcola la distanza assoluta tra le seguenti coppie di punti:

3. $A(-3) \wedge B(4)$

4. $A(-\frac{1}{2}) \wedge B(2)$

5. $A(\frac{2}{3}) \wedge B(-\frac{3}{2})$

6. $A(1) \wedge B(-4)$

7. $A(-\frac{3}{4}) \wedge B(\frac{4}{3})$

Punto medio sulla retta

Ricordiamo

Dati due punti su una retta orientata **A** e **B** di ascissa rispettivamente $\mathbf{x_A}$ e $\mathbf{x_B}$ l'ascissa del punto medio **M** del segmento AB è $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

Esercizio guida

Calcoliamo l'ascissa del punto medio del segmento di estremi A(-2) e B(5).

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$ **Quindi l'ascissa del punto medio M è** $\frac{3}{2}$

Calcola l'ascissa del punto medio del segmento di estremi

8. $A(-3) \wedge B(4)$

9. $A(-\frac{1}{2}) \wedge B(2)$

10. $A(\frac{2}{3}) \wedge B(-\frac{3}{2})$

11. $A(1) \wedge B(-4)$

12. $A(-\frac{3}{4}) \wedge B(\frac{4}{3})$

Sistema di coordinate nel piano

Ricordiamo

Per individuare un punto A in un sistema di assi cartesiani ortogonale dobbiamo assegnare una coppia ordinata di numeri reali $A(x_A, y_A)$ dove:

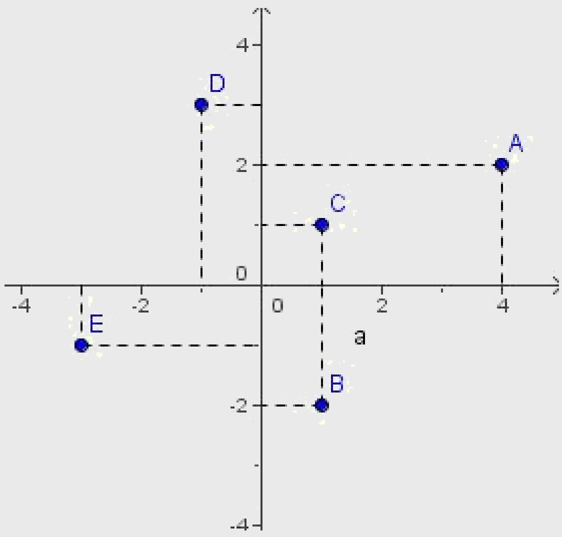
- x_A indica l'ascissa del punto A cioè la distanza sull'asse delle x del punto A dall'origine degli assi
- y_A indica l'ordinata del punto A cioè la distanza sull'asse delle y del punto A dall'origine degli assi
- $x_A \wedge y_A$ vengono chiamate le coordinate del punto A

Esercizio guida

Assegna a ciascun punto rappresentato in figura le sue coordinate.

Guardando la figura le coordinate dei punti A,B,C,D,E sono

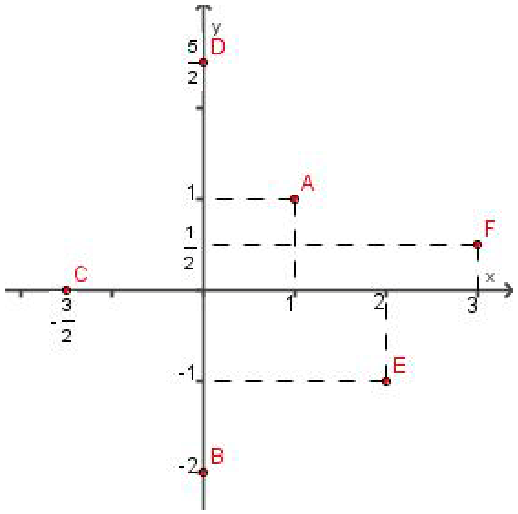
A(4,2) B(1,–2) C(1,1) D(–1,3) E(–3,–1)



13. In un sistema di assi cartesiani disegna i seguenti punti, dopo aver preso un'unità di misura appropriata:

$$A(-4,2) \quad B(1,2) \quad C(0,1) \quad D(-1,\frac{1}{2}) \quad E(-\frac{3}{2},-1) \quad F(\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \quad G(-\frac{3}{2},-1) \quad H(0,-\frac{4}{2})$$

14. Assegna a ciascun punto rappresentato in figura le sue coordinate



A(..........)

B(..........)

C(..........)

D(..........)

E(..........)

F(..........)

Distanza fra due punti

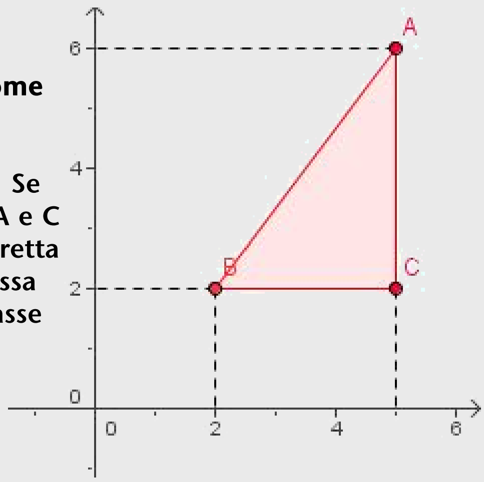
Ricordiamo

$d(\overline{AB}) = | y_A - y_B |$ I punti hanno stessa ascissa

$d(\overline{AB}) = | x_A - x_B |$ I punti hanno stessa ordinata

$d(\overline{AB}) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ I punti hanno coordinate diverse

Esercizio guida



Calcola la misura del perimetro del triangolo che ha come vertici i punti A(5,6) B(2,2) C(5,2)

Dobbiamo calcolare la misura dei segmenti AB, BC, AC. Se osserviamo le coordinate dei punti notiamo che: i punti A e C hanno la stessa ascissa e quindi si trovano su una retta parallela all'asse delle y; mentre B e C hanno la stessa ordinata e quindi si trovano su una retta parallela all'asse della ascisse.

Per calcolare BC: $d(\overline{BC}) = | x_B - x_C | = | 2 - 5 | = | -3 | = 3$

Per calcolare AC: $d(\overline{AC}) = | y_A - y_C | = | 6 - 2 | = 4$

Per calcolare AB:

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Il perimetro del triangolo è dato da $2p = 3 + 4 + 5 = 12$

15. Calcola la distanza fra le seguenti coppie di punti

a. $A(-2,3) \wedge B(-2,-5)$ $A(-4,1-\sqrt{2}) \wedge B(-2,1-\sqrt{2})$ $[8;2]$

b. $A(1,3) \wedge B(-4,-5)$ $A(\frac{1}{2},3) \wedge B(-2,\frac{2}{3})$ $\left[\sqrt{89},\frac{1}{6}\sqrt{421}\right]$

c. $A(\sqrt{2},3) \wedge B(-2,\sqrt{2})$ $A(3,1) \wedge B(3,\frac{2}{5})$ $\left[10(2+\sqrt{2});\frac{3}{5}\right]$

16. In un piano cartesiano sono dati i punti $A(1,3);B(-3,-5);C(2,-1);D(-2,1)$. Verificare che la distanza tra A e B sia il doppio di quella tra C e D $\left[AB = 2\sqrt{20};CD = \sqrt{20}\right]$

17. Nel piano cartesiano sono dati i punti $A(13,1);B(1,-5);C(3,6)$ Verifica che il triangolo sia isoscele e calcola il perimetro $\left[2p = 16\sqrt{5}\right]$

18. Dati i punti A(1, -2), B(2, -5), C(5, -2/3) verifica che siano i vertici di un triangolo rettangolo.

19. Trova il punto C dell'asse delle x equidistante da $A(-6,1)$ e da $B(-1,4)$ $[C(-2,0)]$

Punto medio di un segmento nel piano

Ricordiamo

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ coordinate del punto medio M

$B[(2x_M-x_A),(2y_M-y_A)]$ coordinate del secondo estremo B di un segmento conoscendo le coordinate del punto medio M

Esercizio guida

Trova le coordinate del punto medio M del segmento di estremi P(-2,6) e Q(4,-4)

Basta applicare la relazione $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ **quindi** $M\left(\frac{-2+4}{2},\frac{6-4}{2}\right)$ **cioè** $M(1,1)$

Esercizio guida

Dato il punto A(1,-5) e M(2,3) punto medio del segmento AB trovare le coordinate del punto B secondo estremo del segmento.

Indichiamo il punto $B(x_B,y_B)$, **ricordiamo la relazione** $M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ **sappiamo cioè che** $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ **e che** $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ **sostituendo le coordinate di A e di M ricaviamo**

$2=\frac{1+x_B}{2}$ **e** $3=\frac{-5+y_B}{2}$ **da cui ricaviamo le coordinate di** $B(3,11)$

20. Trova le coordinate del punto medio M del segmento che ha come estremi le seguenti coppie di punti

a. $A(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ e $B(-\frac{1}{2},4)$ $A(-\frac{1}{2},4)$ e $B(3,-2)$ $\left[M(0,\frac{5}{4});M(\frac{5}{4};1)\right]$

b. $A(-1,2)$ e $B(3,5)$ $A(-1,2)$ e $C(5,-1)$ $\left[M(1,\frac{7}{2});M(2,\frac{1}{2})\right]$

c. $A(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ e $B(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ $B(-\sqrt{2},4)$ e $C(3\sqrt{2},-2)$ $\left[M(\frac{1}{2},\frac{7}{8});M(\sqrt{2};1)\right]$

21. Rappresenta il triangolo di vertici A(-7;-1) B(1;3) C(3; -3) Trova i punti medi M e N rispettivamente dei lati AB e BC Verifica che il segmento MN abbia lunghezza uguale a metà di AC.

$[M(-3,1);N(2,0)]$

22. Il punto medio di un segmento ha le coordinate $M(3,-5)$ e uno degli estremi è il punto $B(1,-3)$,trovare le coordinate dell'altro estremo A $[A(5,-7)]$

23. Dati i punti $A(-1,3)$, $B(3,5)$ $C(4,0)$ vertici di un triangolo determina le lunghezze delle tre mediane $\left[5,\frac{\sqrt{58}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$

24. Dati i punti di coordinate $A(a-1,2)$ e $B(3a,a+2)$, trovare per quale valore del parametro a il punto medio di AB ha coordinate uguali $\left[a=\frac{5}{3}\right]$

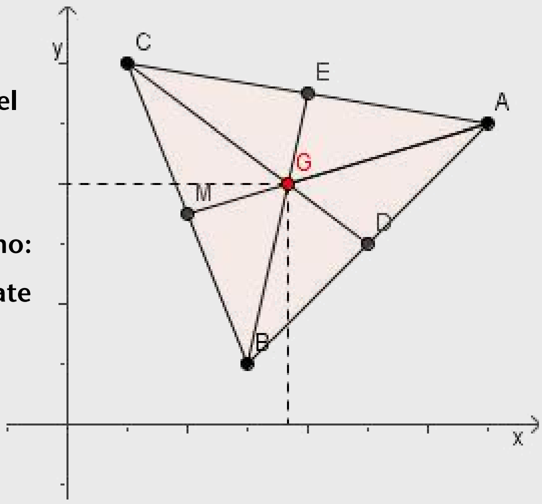
Baricentro di un triangolo

Ricordiamo

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$ coordinate del baricentro di un triangolo dati i tre punti $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$, vertici di un triangolo

Esercizio guida

I punti A(7,5), B(3,1) e C(1,6) sono i vertici di un triangolo. Calcolare il punto d'incontro delle sue mediane.



Il punto d'incontro delle mediane è il baricentro G del triangolo , ricordiamo le relazioni

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

sostituendo le coordinate dei tre vertici e troviamo: $x_G=\frac{7+3+1}{3}=\frac{11}{3}$ **e** $y_G=\frac{5+1+6}{3}=\frac{12}{3}=4$ **le coordinate di** $G\left(\frac{11}{3},4\right)$

25. Calcolare il baricentro dei triangoli che hanno per vertici i seguenti punti:

    a. A(1;3) B(5;0) C(-4;2) $\left[G(\frac{2}{3};\frac{5}{3})\right]$

    b. A(-1;2) B(2;3) C(1;-3) $\left[G(\frac{2}{3};\frac{2}{3})\right]$

    c. A(-4;1) B(1;3) C(2;-1) $\left[G(-\frac{1}{3};1)\right]$

26. I punti A(-2,5), B(3,-1) e C(1,3) sono i vertici di un triangolo. Calcolare il punto d'incontro delle sue mediane. $\left[G(\frac{2}{3};\frac{7}{3})\right]$

27. Dati i punti A(m;11), B(-2m;0) e $C(\frac{2}{3}m;1)$,vertici di un triangolo trova il valore di m sapendo che il punto P(4;4) è il baricentro $[m=-36]$

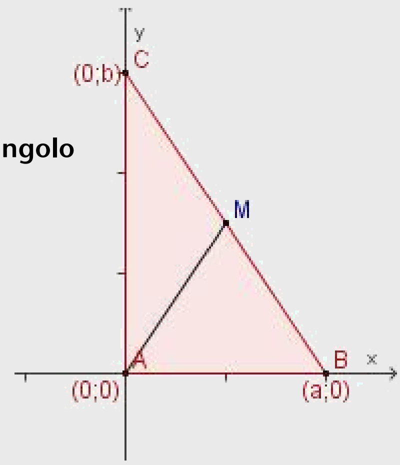
Il metodo delle coordinate e i teoremi di geometria Euclidea

Ricordiamo

E' possibile dimostrare alcuni teoremi di geometria utilizzando il metodo delle coordinate, traducendo gli enti geometrici e le loro proprietà in algebrici e poi si eseguono i calcoli

Esercizio guida

Verifica analiticamente che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa stessa.



Prendiamo un sistema di riferimento opportuno, poniamo il triangolo rettangolo con i cateti sugli assi cartesiani in modo che i vertici abbiano coordinate A(0;0), B(a;0) e C(0;b).

Calcoliamo M punto medio di CB $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$**. Troviamo la misura dell'ipotenusa CB e della mediana relativa all'ipotenusa cioè**

$CB=\sqrt{(a-o)^2+(o-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ **e**

$AM=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-o\right)^2+\left(\frac{b}{2}-o\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ **da cui possiamo ricavare che** $AM=\frac{1}{2}CB$

28. Verifica analiticamente che in un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti
29. Verifica analiticamente che in un parallelogramma le diagonali si dividono scambievolmente per metà
30. Verifica analiticamente che in un trapezio il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui è congruente alla semisomma delle basi
31. Verifica analiticamente che le diagonali di un rettangolo lo dividono in due triangoli rettangoli congruenti
32. Verifica analiticamente che in un triangolo isoscele le mediane relative ai lati congruenti formano con la base due triangoli isoperimetrici.

Luogo geometrico

Ricordiamo

Definiamo **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una data proprietà

Esercizio guida

Trova il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai punti A(1,3) e B(-2,4).

Trovare il luogo geometrico dei punti del piano vuol dire considerare un punto generico del piano P(x,y) e trovare la distanza di P dai punti A e B, cioè trovare le misure dei segmenti PA e PB e porle uguali PA=PB.

Calcoliamo la distanza $AP=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{(1-x)^2+(3-y)^2}$ **e la distanza** $BP=\sqrt{(x_B-x_P)^2+(y_B-y_P)^2}=\sqrt{(-2-x)^2+(4-y)^2}$ **uguagliamo le due distanze** $\sqrt{(1-x)^2+(3-y)^2}=\sqrt{(-2-x)^2+(4-y)^2}$ **svolgiamo i calcoli ed eleviamo ambo i membri al quadrato** $1+\cancel{x}^2-2x+9+y^2-6y=4+\cancel{x}^2+4x+16+y^2-8y$ **il luogo geometrico cercato è:**

$$2y-6x-10=0$$

33. Trova il luogo geometrico dei punti del piano per sia pari a 12 la somma delle coordinate $[x+y=12]$

34. Trova il luogo geometrico dei punti equidistanti dai punti A(2,4) e B(-2,6). Verifica se i punti A(-1,3) e B(4,-7) appartengono al luogo geometrico $[4y-8x-20=0;si;no]$

35. Trova il luogo geometrico dei punti del piano per cui l'ordinata è tripla dell'ascissa $[y=3x]$

36. Trova l'asse del segmento di estremi A(2;2) e B(-2;4) $[8x+4y-12=0]$

37. Trova il luogo geometrico dei punti del piano tali che la distanza dal punto A(2;2) sia la metà di quella dal punto B(-2;-2) $[3x^2+3y^2-20x-20y+24=0]$

38. Trova il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza 4 dal punto A(2;1) $[x^2+y^2-4x-2y-11=0]$

39. Trova l'equazione che rappresenta la circonferenza di centro C(2;0) e raggio 4. (ricorda la definizione di circonferenza) $[x^2+y^2-4x-12=0]$

40. Considerate le due rette parallele *r* di equazione *y*-2*x*=0 e *r'* di equazione *y*-2*x*+4=0, determinare il luogo dei punti equidistanti dalle due rette. $[y=2x+2]$

Esercizi di riepilogo

41. Dati i punti A(3,2), B(6,1), C(5,4) dopo averli disegnati in un piano cartesiano calcola:
    a. Il punto medio di AB
    b. Verifica che il triangolo ABC è isoscele $\left[(\frac{9}{2},\frac{3}{2})\right]$
42. Trova il punto P dell'asse delle y equidistante da $A(3,2)$ e da $B(-8,-3)$ $[P(0,6)]$
43. Rappresenta il triangolo di vertici A(-6;-2) B(3;-8) C(1;1/2).Trova M punto medio di BC e verifica che la misura della mediana AM è uguale alla metà di BC $\left[M(2,-\frac{15}{4})\right]$
44. Verifica che il triangolo di vertici $A(3,0)$, $B(-3,0)$, $A(0,-3\sqrt{3})$ è equilatero.
45. Rappresenta il triangolo di vertici A(-7;-1) B(1;3) C(3; -3) Trova i punti medi M e N rispettivamente dei lati AB e BC Verifica che il segmento MN ha lunghezza uguale a metà di AC.
46. Dati i punti A(6, -2), B(3, -8), C(1, 1/2) verifica che sono i vertici di un triangolo rettangolo
47. Trova i punti P di ascissa doppia dell'ordinata che hanno distanza pari a 5 dal punto A(6;-2) $[P(2,1),P(6,3)]$
48. Dati i punti A(k;1) e B(2;3-2k) determinare il parametro k in modo che il segmento $AB=\sqrt{8}$
49. Dati i punti A(0;0) B(3;0) C(3;k) quanto deve valere il parametro k affinché il triangolo sia rettangolo?
50. Determinare l'ascissa del punto A di ordinata 2 che appartiene alla curva di equazione $3y-5x-8=0$ trova poi la distanza di A dagli assi cartesiani. $[A(2;6);2;6]$
51. Si consideri il quadrilatero di vertici O(0;0), A(2;0), B(3;1), C(1;1). Dimostrare che è un parallelogramma e verificare che le diagonali si dividono scambievolmente a metà
52. Sapendo che le coordinate degli estremi del lato AB di un parallelogramma sono A(-1;4), B(3;-2) e che il punto di incontro delle diagonali è P(2;2), trovare le coordinate degli altri vertici del parallelogramma $[C(5;0),D(1;6)]$
53. Dato il triangolo di vertici A(1;0), B(0;-2), C(3;4), verificare che ha l'area doppia di quella del triangolo A'B'C' che ha i vertici nei punti medi del triangolo ABC

54. Si consideri il segmento AB, si prenda su di esso due punti M e N in modo tale che il segmento risulti diviso in tre parti congruenti. Sapendo che A(4;-2), M(1;1), calcolare le coordinate dei punti B e N e la misura di ciascuna parte. $\left[(7;-5),(13;-11);\sqrt{34}\right]$

55. Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da A(-3;2), B(4;0).

    Trova poi l'area del triangolo che abbia come terzo vertice il punto C appartenete a tale luogo geometrico e di ascissa nulla $\left[14x-4y-3=0; A=\frac{\sqrt{255}}{8}\right]$

La retta

Retta e le sue equazioni

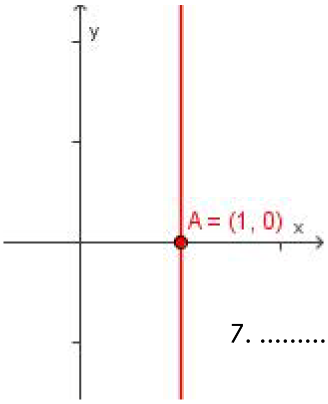
Equazioni di rette come luogo geometrico

Ricordiamo

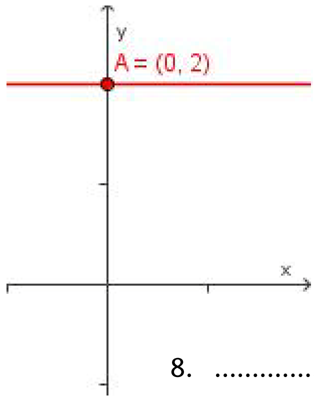
$y = h \rightarrow h \in \Re$	equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse
$x = 0$	equazione dell'asse delle ordinate
$y = h \rightarrow h \in \Re$	equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse
$x = k \rightarrow k \in \Re$	equazione di una retta parallela all'asse delle ordinate
$y = x$	equazione della bisettrice del I e III quadrante
$y = -x$	equazione della bisettrice del II e IV quadrante

1. Tra le equazioni delle seguenti rette individua e disegna quelle parallele all'asse delle ascisse:
2. a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 5$ d) $y = 3$ e) $y = x$ f) $y = -x$ g) $x = -1$ h) $y = -3$ i) $y - 2 = 0$ l) $x - 3 = 0$
3. Tra le equazioni delle seguenti rette individua e disegna quelle parallele all'asse delle ordinate:
4. a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 5$ d) $y = 3$ e) $y = x$ f) $y = -x$ g) $x = -1$ h) $y = -3$ i) $y - 2 = 0$ l) $x - 3 = 0$
5. Tra le equazioni delle seguenti rette individua e disegna quelle delle bisettrici:
6. a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $x = 5$ d) $y = 3$ e) $y = x$ f) $y = -x$ g) $x = -1$ h) $y = -3$ i) $y - 2 = 0$ l) $x - 3 = 0$
7. Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti che hanno ordinata uguale a -3
8. Scrivi l'equazione delle rette parallele agli assi e passanti per il punto A(-2,3)
9. Disegna e scrivi l'equazione della retta passante per il punto A(1,-2) parallele all'asse delle ascisse

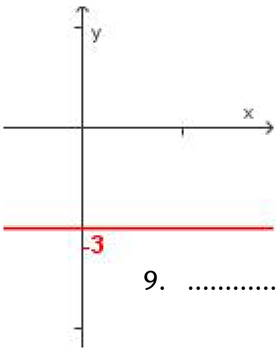
10. Scrivi l'equazione della retta relativa ai seguenti grafici



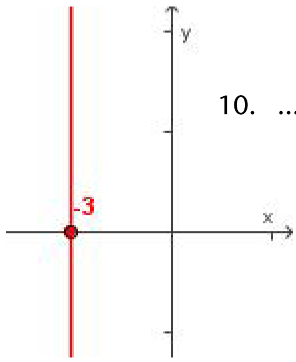
7. ....



8. ....



9. ....



10. ....

Equazione retta che passa per origine

Ricordiamo

$y = mx$	equazione della retta che passa per origine degli assi

Esercizio guida

Scrivere l'equazione della retta che passa per l'origine e per il punto A(-1,3)
L'equazione della retta cercata è del tipo $y = mx$ **, possiamo procedere in due modi:**

1. modo
Troviamo il coefficiente angolare ricordando che se la retta passa per l'origine è dato dal rapporto delle coordinate del punto A $m = \frac{y_A}{x_A} = \frac{3}{-1} = -3$ **quindi l'equazione della retta cercata è** $y = -3x$

2.modo
Il punto A deve appartenere alla retta e quindi soddisfare l'equazione $y = mx$ **, possiamo perciò sostituire le coordinate del punto A e trovare il valore di m** $3 = m(-1) \rightarrow m = -3$ **l'equazione cercata è** $y = -3x$

Prendiamo un sistema di riferimento opportuno, poniamo il triangolo rettangolo con i cateti sugli assi cartesiani in modo che i vertici abbiano coordinate A(0;0), B(a;0) e C(0;b).
Calcoliamo M punto medio di CB $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ **. Troviamo la misura dell'ipotenusa CB e della mediana relativa all'ipotenusa cioè** $CB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ **e**
$AM = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ **da cui possiamo ricavare che** $AM = \frac{1}{2}CB$

Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine e per i seguenti punti:

11. $A(-2,3)$ $\left[y = -\frac{3}{2}x\right]$

12. $A(2,\frac{1}{2})$ $\left[y = \frac{1}{4}x\right]$

13. $A(-1,3)$ $[y = -3x]$

14. $A(\frac{2}{3},\frac{1}{4})$ $\left[y = \frac{3}{8}x\right]$

15. $A(1,3)$ $[y = 3x]$

Coefficiente angolare

Ricordiamo

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ **coefficiente angolare**

dove $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ sono due generici punti della retta

$m = \frac{y_P - 0}{x_P - 0} = \frac{y_P}{x_P}$ quando uno dei due punti è l'origine degli assi

Il coefficiente angolare rappresenta la pendenza della retta, cioè l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.

Se $m > 0 \rightarrow 0° < \alpha < 90°$ -

Se $m < 0 \rightarrow 90° < \alpha < 180°$

Esercizio guida

Trovare il coefficiente angolare della retta che passa per i punti A(2,3) e B(-1,-3/2)

Ricordando che $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ avremo $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - \left(-\frac{3}{2}\right)}{2-(-1)} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{2}$

Determina il coefficiente angolare della retta a cui appartengono le coppie di punti assegnate:

16. A(5,2) e B(-1,3) $\left[m = -\frac{1}{6}\right]$

17. A(-2,2) e B(-1,1) $\left[m = -\frac{1}{3}\right]$

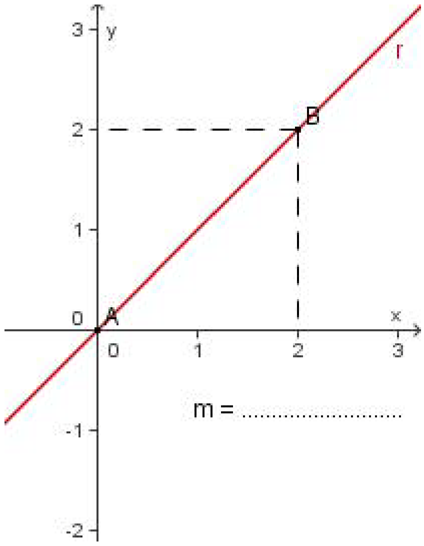
18. A(5,1/2) e B(-1,0) $\left[m = \frac{1}{12}\right]$

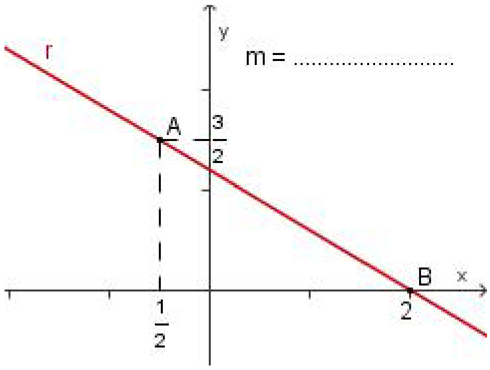
19. A(-1,2) e B(1,3) $\left[m = \frac{1}{2}\right]$

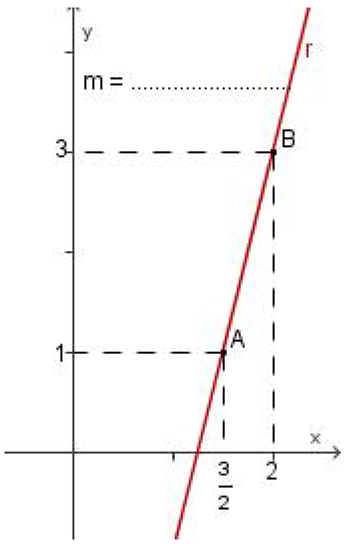
20. A(5,-2) e B(0,0) $\left[m = -\frac{2}{5}\right]$

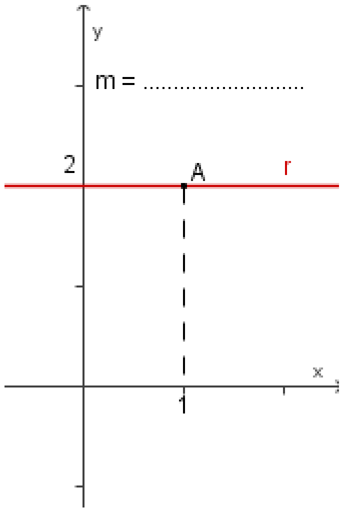
21. A(-2 ; 3) e B(-2;-1) [m non esiste perché è x = -2]

22. Individua il coefficiente angolare delle rette disegnate nei seguenti grafici









Equazione retta generica

Ricordiamo

$y = mx + q$ **equazione della retta generica** in forma esplicita con m coefficiente angolare, q = ordinata all'origine ordinata del punto di intersezione della retta con asse y

$ax + by + c = 0$ **equazione della retta generica** in forma implicita con $m = -\frac{a}{b}$ coefficiente angolare

$q = -\frac{c}{b}$ = ordinata all'origine ordinata del punto di intersezione della retta con asse y

Esercizio guida

Scrivere in forma esplicita l'equazione della retta 3x-2y+5=0 e individua coefficiente angolare e ordinata all'origine

L'equazione della retta scritta in forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, quindi ricaviamo la y dall'equazione cioè $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ dove il coefficiente angolare è $m = \frac{3}{2}$ e l'ordinata all'origine è $q = \frac{5}{2}$

Scrivi in forma esplicita le seguenti rette e individua coefficiente angolare e ordinata all'origine

23. $2y - 4x = 1$

24. $y - x = -1$

25. $3x - 12y - 4 = 0$

26. $y + 2x = 0$

27. $\frac{1}{5}x + 2y - 4 = 0$

Determina coefficiente angolare e ordinata all' origine delle seguenti rette, senza scriverle in forma esplicita

28. 2x-5y-1=0

29. 3x+4y-7=0

30. 6x-2y=0

31. 9x-3y+1=0

Equazione della retta passante per un punto

Ricordiamo

Dato un punto $P(x_o, y_o)$ e $m = m_o$ il coefficiente angolare l' equazione della retta si determina utilizzando la seguente relazione

$$y - y_o = m_o(x - x_o)$$

Esercizio guida

Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto P(2;3) e che ha il coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per i punti A(-1;2) e B(0;-3)

Per prima cosa andiamo a calcolare il coefficiente angolare della retta che passa per i punti A e B cioè $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2+3}{-1-0} = -5$ andiamo a sostituire coefficiente angolare e coordinate del punto P nell'equazione $y - y_o = m_o(x - x_o)$ ossia $y - 3 = -5(x - 2)$ l'equazione della retta cercata è $y = -5x + 13$

32. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(3;-2) e avente coefficiente angolare

    $m = 4$ $[y = 4x - 14]$

33. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto medio del segmento di estremi A(2;3) e B(-4;1)

    avente coefficiente angolare m = -1

    $[y = -x + 1]$

34. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(0;1) e avente lo stesso coefficiente angolare

    della bisettrice del secondo e quarto quadrante $[y = -x + 1]$

35. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P(1;0) e avente lo stesso coefficiente angolare

    della retta di equazione $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ $[y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}]$

36. Una retta r passa per il punto (1;3) ed ha coefficiente angolare uguale a ½ . Una retta t ha

    coefficiente angolare –1 e passa par il punto (2;-1) Calcola le coordinate del punto P d'intersezione

    delle due rette. [P(-1;2)]

37. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto A(2,-1) ed avente coefficiente angolare 5.

    [y = 5x – 11]

Equazione della retta passante per due punti

Ricordiamo

Dati i punti $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$

$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ **equazione della retta passante per due punti**

$\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x_3-x_2}{x_1-x_2}$ **condizione di allineamento**

Esercizio guida

Scrivere l'equazione della retta che passa per i punti A(-1,3) e B(2, -1)

L'equazione della retta cercata è del tipo $y = mx + q$, possiamo procedere in due modi:

1. modo

Troviamo il coefficiente angolare che è dato da $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{3-(-1)}{-1-2}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$ l'equazione diventa $y=-\dfrac{4}{3}x+q$ per trovare *q* ricordiamo che se un punto appartiene alla retta le sue coordinate devono soddisfare l'equazione, quindi sostituiamo le coordinate di uno dei due punti nell'equazione trovata es. del punto A $3=-\dfrac{4}{3}(-1)+q$ risolviamo l'equazione e troviamo *q* $3=\dfrac{4}{3}+q \rightarrow q=\dfrac{5}{3}$

l'equazione cercata è $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$

2. modo

Tutti e due i punti appartengono alla retta e quindi devono soddisfare contemporaneamente l'equazione dobbiamo cioè risolvere un sistema di due equazioni che ha come variabili *m* e *q*

$$\begin{cases}3=(-1)m+q\\-1=2m+q\end{cases}\quad\begin{cases}m=-3+q\\-1=2(-3+q)+q\end{cases}\quad\begin{cases}m=-3+q\\-1=-6+3q\end{cases}\quad\begin{cases}m=-3+\left(\dfrac{5}{3}\right)\\q=\dfrac{5}{3}\end{cases}\quad\begin{cases}m=-\dfrac{4}{3}\\q=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

l'equazione della retta cercata è $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$

38. Scrivi l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti

1. A(-2;3) e B (1; 4) $[y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}]$
2. A(0;-2) e B(1;$\frac{2}{3}$) $[2x+3y+4=0]$
3. A(1;-2) e B(3;-3) $[x+2y+3=0]$
4. A(3;-1) e B(7;1) $[-x+2y+5=0]$
5. A(0;-1) e B($\frac{7}{2}$;0) $[2x-7y-7=0]$

39. Stabilisci se i seguenti punti A(1;-2), B(3;-1) e C(7;1) sono allineati

40. Scrivi l'equazione della retta c passante per il punto P (1; 4) e per il punto medio del segmento AB dove A(-6;9) e B(2;3) $[3y - x = 11]$

Come disegnare una retta

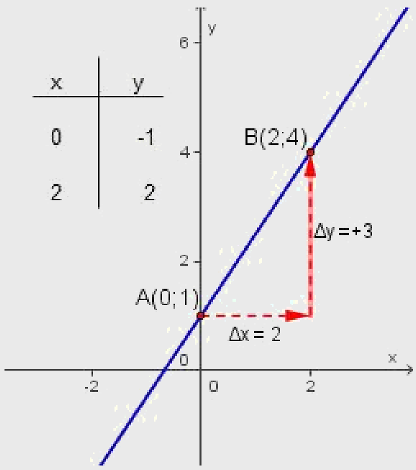
Ricordiamo

Troviamo delle coppie di valori che sono soluzione dell'equazione lineare in due incognite $y = mx + q$.
Ricordando che il coefficiente angolare rappresenta la pendenza della retta e che $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ possiamo affermare che nel passaggio da un punto di ascissa minore a un punto di ascissa maggiore sulla retta, m è l'incremento dell'ordinata per ogni unità di incremento dell'ascissa.

Esercizio guida

Disegnare la seguente retta $3x - 2y + 2 = 0$

x	y
0	-1
2	2



Per prima cosa scriviamo la retta in forma esplicita $y = \frac{3}{2}x + 1$ poi possiamo procedere in due modi:

1. modo
Assegniamo dei valori alla variabile x e troviamo i corrispondenti per la variabile y. (Ricordando che per due punti passa una sola retta basta dare due valori alla variabile x)
$x = 0 \to y = 1$ e $x = 2 \to y = 2$

2. modo
Ricordiamo che l'ordinata all'origine, nel nostro caso $q = 1$, rappresenta l'intersezione della retta con l'asse delle ordinate possiamo subito disegnare il punto $A(0;q) \to A(0;1)$, inoltre sappiamo che il coefficiente angolare rappresenta la pendenza della retta e che $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ cioè m è l'incremento dell'ordinata per ogni unità di incremento dell'ascissa, nel nostro caso $m = \frac{3}{2}$, quindi per passare dal punto A al punto B possiamo spostarci prima verso destra (incremento delle ascisse) di 2 unità e poi verso l'alto (incremento delle ordinate) di tre unità. Se il coefficiente angolare fosse stato negativo per l'incremento delle ordinate ci si sarebbe spostati verso il basso.

41. Disegna in un grafico cartesiano le seguenti rette:

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) $4x - 2y + 2 = 0$ c) $y = \frac{4}{3}x - 1$ d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e) $x + 2y + 4 = 0$

f) $y = -\frac{1}{2}x - 3$ g) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ h) $4x - 3y + 9 = 0$ *i*) $y = \frac{4}{5}x + 2$ l) $2x + 2y + 5 = 0$

Rette parallele e perpendicolari

Rette parallele

Ricordiamo

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$,non parallele all'asse delle ordinate, sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare $m = m'$

Esercizio guida

Stabilire se le rette di equazione r) $y = 3x + 1$ **e s)** $2y - 6x + 4 = 0$ **sono parallele; trovare poi l'equazione della retta parallela a r e che passi per A(-1,3)**

Per stabilire se le rette sono parallele devo calcolare i loro coefficienti angolare e verificare che siano uguali $m_r = 3$ per la retta s posso scriverla in forma esplicita e quindi trovo $m_s = 3$.
Le due rette sono perciò parallele
Calcolo l'equazione della retta parallela a r che passa per A(-1,3) utilizzo l'equazione $y - y_0 = m_0(x - x_0)$ dove $m = 3$ quindi $y - 3 = 3(x + 1)$ l'equazione della retta cercata è $y = 3x + 6$

42. Scrivi l'equazione della retta passante per P(1;2) e parallela alla retta $3x - y + 4 = 0$.

[$3x - y - 1 = 0$]

43. Tra le seguenti coppie rette individua quelle parallele

a) $y = 2x-3$ b) $y = -3x + 2$ c) $y - 2x - 6 = 0$ d) $y + 2x - 3 = 0$

e) $3y - x + 1 = 0$ f) $3x - 2y + 1 = 0$ g) $3y + 6x - 1 = 0$ h) $2y + x = 1$

44. Determina il valore di ***a*** per cui le rette $ax - y = 2$ e $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$ risultino parallele [$a = \frac{4}{3}$]

45. Scrivi l'equazione della retta passante per A(3,0) e parallela alla retta *r* di equazione: $y = -2x + 5$.

[$y = -2x + 6$]

Rette perpendicolari

Ricordiamo

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono perpendicolari quando vale una delle seguenti relazioni: $mm' = -1$ $\quad m = -\frac{1}{m'}$

Esercizio guida

Stabilire se le rette di equazione r) $y = 4x + 1$ **e s)** $8y + 2x + 3 = 0$ **sono perpendicolari; trovare poi l'equazione della retta perpendicolare a r e che passi per A(1,-3)**

Per stabilire se le rette sono perpendicolari devo calcolare i loro coefficienti angolare e verificare che valga la relazione $m = -\frac{1}{m'}$, $m_r = 4$ per la retta s posso scriverla in forma esplicita e quindi trovo $m_s = -\frac{1}{4}$ le rette sono perpendicolari.

Calcolo l'equazione della retta perpendicolare a r che passa per A(1,-3) utilizzo l'equazione $y - y_0 = m_0(x - x_0)$ dove $m_r = 4$ trovo il coefficiente angolare usando la relazione $m = -\frac{1}{m'}$ e trovo $m = -\frac{1}{4}$ sostituisco nell'equazione $y - y_0 = m_0(x - x_0)$ $\rightarrow$ $y + 3 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ l'equazione della retta cercata è $y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$

46. Scrivi l'equazione della perpendicolare alla retta 3x + 5y + 2 = 0 passante per il punto P(1 ; 2).

[5x – 3y + 1 = 0]

47. Tra le seguenti coppie rette individua quelle perpendicolari

   a. a) y = 2x-3 b) y = - 3x + 2 c) y – 2x – 6 = 0 d) y + 2x – 3 = 0

   b. e) 3y –x +1 = 0 f) 3x –2y +1 = 0 g) 3y + 6x –1 = 0 h) 2y + x = 1

48. Date le retta y + x = 0, x - y + 1 = 0, 2x – y – 3 = 0, verifica che esse determinano un triangolo rettangolo

49. Scrivi l'equazione della retta passante per A(-2,1) e perpendicolare alla retta *r* di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 3$ [y = 2x – 1]

50. Determinare il valore di ***a*** per cui le rette $ax - y = 2$ e $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 4$ risultino perpendicolari

$[a = -\frac{3}{4}]$

Posizione reciproca di due rette nel piano

Ricordiamo

Due rette *r* e *s* di equazione rispettivamente $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ (o scritte in forma implicita $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$) nel piano possono intersecarsi coincidere o essere parallele, per stabilirlo dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ le rette sono incidenti
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ le rette sono coincidenti
- Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ le rette sono parallele

Esercizio guida

Stabilire se le rette di equazione r) $x - 3y = -5$ **e s)** $2x + y = 4$ **sono incidenti, coincidenti o parallele.**

Per stabilire se le rette sono incidenti, coincidenti o parallele devo calcolare i rapporti $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$ e trovo: $\frac{a}{a'} = \frac{2}{1}$, $\frac{b}{b'} = \frac{1}{-3}$ quindi le rette sono incidenti perché $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. Per trovare il punto d'incidenza devo risolvere il sistema $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ uso il metodo della sostituzione $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 6y - 10 + y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

A(1;2) è il punto che le due rette hanno in comune

51. Stabilisci se le seguenti rette sono incidenti, coincidenti o parallele.

a. $y = 2x - 9$ e $x + y = 3$ [incidenti P(4;-1)]

b. $2x + y - 3 = 0$ e $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 7 = 0$ [parallele nessuna intersezione]

c. $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 3y + 4 = 0$ [incidenti P(1;-2)]

d. $-2x + y + 3 = 0$ e $4x - 2y + 1 = 0$ [parallele nessuna intersezione]

e. $x + y - 1 = 0$ e $2x - y + 4 = 0$ [incidenti P(-1;2)]

f. $x + y = 0$ e $2x + 3y + 1 = 0$ [incidenti P(1;-1)]

g. $2x + y - 2 = 0$ e $\frac{1}{2}y = -x + 1$ [coincidenti infinite intersezioni]

h. $x + y = 0$ e $3x + 3y + 1 = 0$ [parallele nessuna intersezione]

i. $-2 + 3x = 0$ e $1 - y = 0$ [incidenti $P(\frac{2}{3};1)$]

Distanza di un punto da una retta

Ricordiamo

$HP = |h - x_0|$ distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta parallela all'asse delle y

$HP = |k - y_0|$ distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta parallela all'asse delle x

$\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da rette di equazioni $ax + by + c = 0$

$\dfrac{|mx_0 - y + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ distanza di un punto $P(x_0, y_0)$ da rette di equazioni $y = mx + q$ cioè scritta in forma esplicita

Esercizio guida

Determina la distanza del punto P(-3;2) dalla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$

Per calcolare la distanza punto retta uso la relazione $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dove $x_0 = -3; y_0 = 2$ e $a = 2, b = -1, c = 1$ vado a sostituire e trovo $d = \dfrac{|-6 - 2 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{|-7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

52. Calcola la distanza di P(1; –3) dalla retta 3x + 4y – 2 = 0 $\left[\dfrac{11}{5}\right]$

53. Calcola la distanza di P(1; –3) dalla retta 3x – 2 = 0 $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

54. Calcola la distanza di P(1; –3) dalla retta 4y – 2 = 0 $\left[\dfrac{7}{2}\right]$

55. Conduci dall'origine la retta r: perpendicolare alla retta s: x –2y = 4 e determina la distanza del punto O(0;0) della retta r.

[2x + y = 0; (4√5)/5]

Equazione della bisettrice di un angolo

Ricordiamo

$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette, non parallele tra loro r) $ax+by+c=0$ e s)a'x+b'y+c'=0

Esercizio guida

Determina le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette di equazione $2x-y+1=0$ **e** $x-3y+2=0$

Per trovare le equazioni delle bisettrici basta applicare la relazione $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ cioè

$\frac{2x-y+1}{\sqrt{4+1}}=\pm\frac{x-3y+2}{\sqrt{1+9}}$ da cui le equazioni delle due rette sono

$(2\sqrt{10}-\sqrt{5})x-(\sqrt{10}-3\sqrt{5})y+\sqrt{10}-2\sqrt{5}=0$ e $(2\sqrt{10}+\sqrt{5})x-(\sqrt{10}+3\sqrt{5})y+\sqrt{10}+2\sqrt{5}=0$

56. Determina le equazioni delle bisettrici degli angoli formatidalle rette di equazione

$3x+2y-5=0$ e $4x-y+6=0$

[$\sqrt{17}\,|\,3x+2y-5\,|=\pm\sqrt{13}\,|\,4x-y+6\,|$]

57. Considerate le due rette *r* di equazione *y*-2*x*=0 e *r'* di equazione *y*-4*x*=0, determinare il luogo dei punti equidistanti dalle due rette.

[sono le bisettrici $\sqrt{17}\,|\,y-2x\,|=\pm\sqrt{5}\,|\,y-4x\,|$]

Esercizi di riepilogo

58. Dati i punti A(5;3),B(-2;2), C(0;-2) vertici di un triangolo, verifica che l'ortocentro, il baricentro e il vertice A sono allineati
59. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti (3, – 4) e (2, 1) [5 x + y – 11 = 0]
60. Dati i due punti A(3,1) e B(-1,3), determinare l'equazione dell'asse del segmento AB. [2x-y=0]
61. Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A(-2,3) e B(1,-5). [8x + 3y +7 =0]
62. Scrivi l'equazione della mediana AM del triangolo di vertici : A(-1,6) B(-2,1) C(4,3) [y = -2x + 4]
63. Scrivi l'equazione dell'altezza AH del triangolo di vertici: A(-3,-1) B(-1,7) C(5,1) [y = -x – 4]
64. Dato il punto A(-4,0) determinare: la retta r passante per A parallela alla bisettrice del 1 e 3 quadrante; il punto B che appartiene alla retta r sapendo che la sua ordinata vale 1; la retta s passante per B perpendicolare a r e il punto C di intersezione di s con l'asse delle y ed infine il perimetro e area del triangolo ABC [x –y + 4= 0; B(-3;1),x + y – 2 = 0, C(0;2)]
65. Determinare le coordinate del punto medio del segmento intercetto dagli assi x e y sulla retta passante per i punti (-1;0) e (2;-3) [(-½ ;- ½)]
66. Data le retta di equazione x – y = 2 si trovino: l'equazione della parallela passante per il punto P(1,3) e le coordinate del punto M in cui tale retta interseca la bisettrice del secondo e del quarto quadrante [x – y + 2 = 0 ; (-1,1)]
67. Scrivere le equazioni delle mediane del triangolo di vertici A(-1,3),B(-5,-3),C(2,-1) e verificare che passano per uno stesso punto di cui si richiedono le coordinate [R(-4/3, -1/3)]
68. Una retta r passa per il punto (3;1) ed ha per coefficiente angolare ½ . Una seconda retta ha coefficiente angolare –1 e passa par il punto (-1;2) Calcolare le coordinate del punto P d'intersezione delle due rette [P(1,0)]
69. Sia B il punto di intersezione tra la retta ***s*** passante per i punti C(-2, 0) e P(-6, -5) e la retta ***r*** di equazione 2y+x-12=0.
    a. Sia ***t*** la retta passante per A(4; 4) e perpendicolare alla retta ***r*** e sia D il punto di intersezione tra la retta ***t*** e l'asse delle ascisse.
    b. Determina l'area del quadrilatero ABCD. [B(2;5),D(2;0),A=15]

70. Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A(-5;-4) e B(-5; 6). Determina l'equazione della retta perpendicolare ad AB e passante per P(3;2). Rappresenta graficamente [x=-5, y=2]

71. Determina le coordinate del punto medio del segmento intercetto dagli assi x e y sulla retta passante per i punti (-1;0) e (2;-3) [$M(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$]

72. Date le rette di equazione $s)2x+3y-5=0$ e $r)2x+3y+10=0$ trovare il luogo dei punti del piano la cui distanza dalla retta r) è la metà di quella della retta s) [$2x+3y+25=0$ e $2x+3y+5=0$]

73. Dato il triangolo di vertici A(-3; 1), B(0;3) C(1;-2) trovare area, baricentro G ortocentro H.

[$A=\frac{17}{2}$, $G(-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$, $H(-\frac{21}{17};\frac{23}{17})$]

74. Trovale rette passanti per il punto A(6;4) e che ha distanza 3cm dal punto P(0;3), Trova successivamente l'area del triangolo formato dalle retta e dall'asse delle ascisse.

[$7x-24y+54=0$ e $x-6=0$ $A=\frac{108}{7}$]

75. Trova l'equazione della retta che passa per il punto A(4;5) e che interseca l'asse delle x in B e l'asse delle y in C tale che si abbia OA=2OB [$4y-5x=0$, $x+2y-14=0$, $2y-x-3=0$]

76. Dati i punti O(0;0) e A(1;0) estremi della base di un triangolo equilatero, trovare le coordinate del punto C terzo vertice del triangolo e del punto D suo simmetrico rispetto alla base AB. Calcolare poi la misura della diagonale maggiore del rombo ABCD. [$C(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $CD=\sqrt{3}$]

77. Dati i punti P(-2;3) e Q(1;0) scrivi l'equazione della retta parallela alla retta che passa per P e Q e che passi per il punto A(-1; 2) Disegna poi le rette [le rette sono coincidenti y=-x+1]

78. Dato il triangolo di vertici A(-3; 4), B(3;1), C(2;8)
    a. determina l'area
    b. determina un punto D in modo da ottenere un trapezio rettangolo in A e di base maggiore AB [$A=\frac{39}{2}$, $D(-\frac{2}{5};\frac{46}{5})$]

La circonferenza

Equazione della circonferenza

Ricordiamo

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro.

Esercizio guida

Determinare il luogo dei punti del piano che hanno distanza uguale a 3 dal punto C(2;4).
Un punto P(x,y) appartiene alla circonferenza se PC=3 troviamo la distanza $PC = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$ uguagliamo la distanza a 3 ed eleviamo al quadrato $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ otteniamo così l'equazione della circonferenza di raggio 3 e centro C

Ricordiamo

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ equazione di una circonferenza di raggio r e centro $C(\alpha,\beta)$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ equazione generale della circonferenza con a,b,c, dove $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$

$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, coordinate del centro di una circonferenza

$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ espressione del raggio di una circonferenza

Esercizio guida

Determinare l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto C(-2;4) raggio 5.

Utilizziamo l' equazione $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ conoscendo il centro e il raggio.

Otteniamo $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

1. Trova il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza uguale a 4 dall'origine degli assi.

   [$x^2 + y^2 = 16$]

2. Trova il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza uguale a 3 dal punto C(2,- 1)

   [$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$]

3. Determina l' equazione della circonferenza di centro C(1,2) e raggio $r = \sqrt{2}$.

   [$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$]

4. Determina l' equazione della circonferenza di centro C(-3,4) e raggio $r = \sqrt{5}$.

   [$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$]

5. Determina l' equazione della circonferenza di centro O(0,0) e raggio $r = \sqrt{10}$. [$x^2 + y^2 = 10$]

6. Determina l' equazione della circonferenza avente il diametro coincidente con il segmento AB, con A(7,4) e B(9,8). [$x^2 + y^2 - 16x - 12y + 95 = 0$]

7. Determina l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi P(3,1) e D(0, -2) [$x^2 + y^2 - 3x + y - 2 = 0$]

8. Determina l' equazione della circonferenza avente il centro in C(-5,0) e passante per l' origine.

   [$x^2 + y^2 + 10x = 0$]

9. Determina l' equazione della circonferenza avente il centro C coincidente con il punto di intersezione delle rette di equazione y=2x-3 e y=x+2 e, raggio uguale a $\sqrt{3}$.

   [$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 51 = 0$]

10. Determina l' equazione della circonferenza avente il centro in C(3,5) e raggio uguale alla misura del segmento avente come estremi A(-1,2) e B(5,-4). [$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 38 = 0$]

11. Data l' equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 10 = 0$ trovare le coordinate del centro e il valore del raggio. [C(-3,2), $r = \sqrt{3}$]

12. Data l' equazione della circonferenza $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 24 = 0$ trovare le coordinate del centro e il valore del raggio. [C(4,-5), $r = \sqrt{17}$]

13. Data l' equazione della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ trovare le coordinate del centro e il valore del raggio. [C(2,0), $r = \sqrt{2}$]

14. Data l' equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + 10y - 4 = 0$ trovare le coordinate del centro e il valore del raggio. [C(0,-5), $r = \sqrt{29}$]

15. Tra le seguenti equazioni determina quelle che rappresentano una circonferenza e disegnale:

    a) $x^2 + y^2 - 10x - 7y + 51 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 20 = 0$

    c) $x^2 - y^2 - 10x - 14y + 15 = 0$; d) $x^2 + y^2 + 14y + 20 = 0$

    e) $3x^2 + 2y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$; f) $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 3 = 0$

16. Determina per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza:

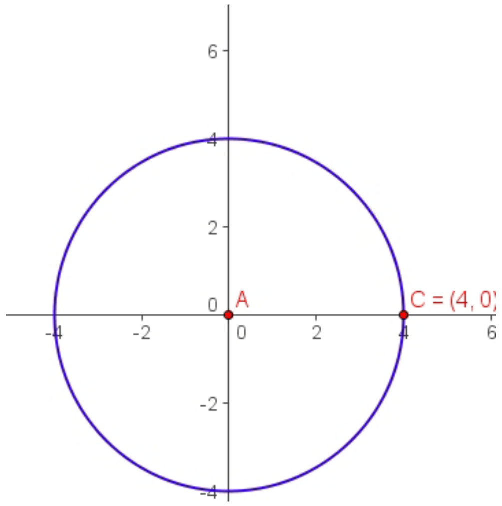
    a) $x^2 + y^2 - kx - 3y + 2 = 0$; [$\forall k \in R$]

    b) $x^2 + y^2 + 2k - 1 = 0$ [$k < \frac{1}{2}$]

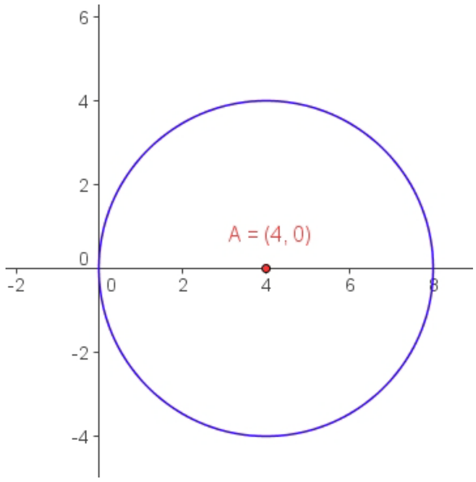
    c) $x^2 - y^2 - (k + 2)x - 6y + 10 = 0$; [$k < -4 \vee k > 0$]

    d) $x^2 + y^2 + (k - 3)y + 20 = 0$ [$k < 3 - 4\sqrt{5} \vee k > 3 + 4\sqrt{5}$]

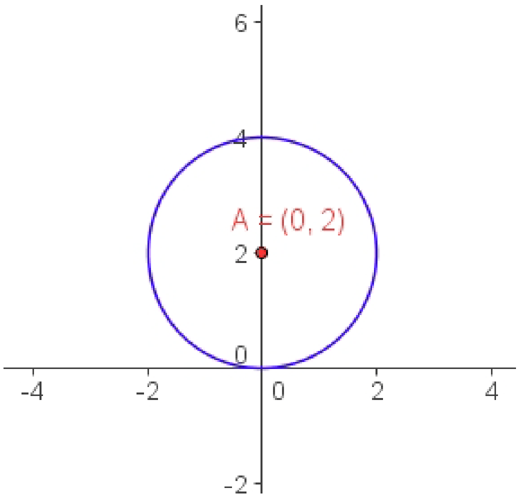
17. Scrivi le equazioni delle circonferenze rappresentate nei seguenti grafici:



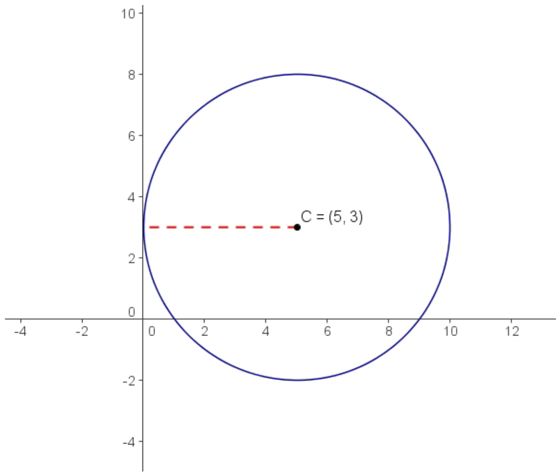
a) -------------------------------



b) -------------------------------



c) -------------------------------



d) -------------------------------

Retta e circonferenza nel piano

Ricordiamo

Dato il sistema formato dall'equazione della circonferenza e della retta

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=mx+q \end{cases}$$

- Se, $\Delta>0$ due soluzioni distinte retta **secante**, due punti in comune la distanza $CH<r$
- Se, $\Delta<0$ nessuna soluzione retta **esterna**, nessun punto in comune la distanza $CH>r$
- Se, $\Delta=0$ due soluzioni coincidenti retta **tangente**, un punto doppio in comune la distanza $CH=r$

Esercizio guida

Stabilire se la retta $y=2x-4$ **è secante, esterna o tangente alla circonferenza di equazione** $x^2+y^2+2x+y-4=0$

Il problema può essere risolto in due diversi modi:

1 – modo

Impostiamo il sistema $\begin{cases} x^2+y^2+2x+y-4=0 \\ y=2x-4 \end{cases}$ L'equazione risolvente è

$x^2+(2x-4)^2+2x+(2x-4)-4=0 \rightarrow 5x^2-12x+8=0$

Calcoliamo il **discriminante** $\frac{\Delta}{4}=36-40<0$ deduciamo che la retta e la circonferenza non hanno punti in comune quindi la retta è **esterna** alla circonferenza

2 – modo

calcoliamo le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza

$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ □$C\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ e $r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$ $r=\frac{\sqrt{21}}{2}$

calcoliamo la distanza della retta dal centro della circonferenza

$d=\frac{|2(-1)-(-\frac{1}{2})-4|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|-\frac{11}{2}|}{\sqrt{5}}=\frac{11}{2\sqrt{5}}$ confrontiamo questa distanza con la misura del raggio Troviamo che la distanza è maggiore della misura del raggio cioè $\frac{11}{\sqrt{20}}>\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Possiamo concludere che la retta è **esterna** alla circonferenza

18. Stabilire se le seguenti circonferenze e le relative rette sono secanti esterne o tangenti

    $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ e $x+y-3=0$. [secante in P(2,1) e Q(6, –3)]

    $x^2+y^2=9$ e $x+y=6$. [esterne]

    $x^2+y^2=5$ e $2x+y-5=0$. [tangente]

19. Trovare l'intersezione della circonferenza di centro C(3,4) e raggio lungo 2, con la retta passante per P(1,4) di coefficiente angolare – 1. [P(1,4) e Q(3,2)]

20. Dopo aver determinato:

    a) la circonferenza con il centro in C(1,0) e raggio 3;

    b) l' equazione della retta r passante per A(3,1) e B(1,2)

    verificare se r è secante, tangente o esterna alla circonferenza.

    [$x^2+y^2-2x-8=0$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$]

21. Data l' equazione della circonferenza $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, determinare per quali valori reali di k la retta ky+(k-1)x+3=0 è secante, tangente o esterna alla circonferenza.

    [$\frac{-5-\sqrt{19}}{2}<k<\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$ secante; $k=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}\vee k=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$ tangente;

    $k<\frac{-5-\sqrt{19}}{2}\vee k>\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$ esterna]

22. Data l' equazione della circonferenza $x^2+y^2-2kx+4y-1=0$ e la retta r di equazione 2y-3x+1=0, determinare per quali valori di k la retta r è tangente alla circonferenza.

    [$k=\frac{-9-\sqrt{145}}{4}\vee k=\frac{-9+\sqrt{145}}{4}$]

23. Determina per quale valore di k la retta di equazione x=k incontra la circonferenza $x^2+y^2-2x-8=0$ in due punti A e B tali che AB=2. [$k=1-2\sqrt{2}\vee k=1+2\sqrt{2}$]

24. Determina per quale valore di k la retta di equazione x=k stacca sulla circonferenza $x^2+y^2-2x-4=0$ una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$. [$k=1-\sqrt{3}\vee k=1+\sqrt{3}$]

Retta tangente alla circonferenza

Ricordiamo

Per trovare l'equazione della retta passante per $P(x_P, y_P)$ tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ possiamo procedere in diversi modi:

1 metodo

Mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione del fascio di rette che ha come sostegno il punto $P(x_P, y_P)$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y - y_P = m(x - x_P) \end{cases}$ Troviamo l' equazione risolvente che è un'equazione di secondo grado in x o in y, applichiamo la condizione di tangenza cioè poniamo il $\Delta = 0$

2 metodo

Calcoliamo la distanza dal centro della circonferenza al fascio che ha come sostegni il punto $P(x_P, y_P)$, poniamo questa distanza uguale al raggio della circonferenza: $d = \frac{|m\alpha - \beta - mx_P + y_P|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$

3 metodo

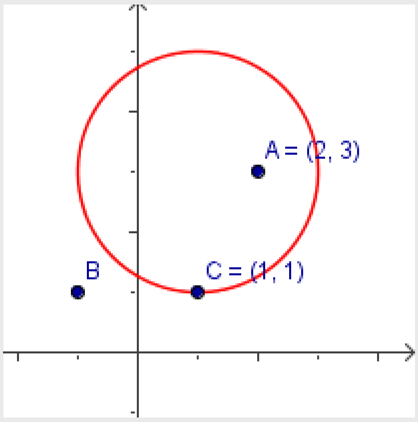
Ricordando che la retta su cui giace il raggio e la retta tangente alla circonferenza sono perpendicolari calcoliamo il coefficiente angolare della retta tangente $m = -\frac{1}{m_{PC}}$ Sostituiamo il coefficiente trovato nel fascio passante per $P(x_P, y_P)$ e troviamo $y - y_P = -\frac{1}{m_{PC}}(x - x_P)$

4 metodo

La regola dello sdoppiamento $xx_P + yy_P + a\frac{x + x_P}{2} + b\frac{y + y_P}{2} + c = 0$

Esercizio guida

Data l'equazione della circonferenza C $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ **stabilire se i seguenti punti A(2,3), B(-1,1), C(1,1) sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza**



Imponiamo il passaggio per:

A → $(2)^2+(3)^2-2(2)-6(3)+6=0$ troviamo $-3<0$ quindi il punto A è interno alla circonferenza

B → $(-1)^2+1^2-2(-1)-6(1)+6=0$ troviamo $4>0$ quindi il punto B è esterno alla circonferenza

C → $1^2+1^2-2(1)-6(1)+6=0$ troviamo $0=0$ quindi il punto C appartiene alla circonferenza

Esercizio guida

Data l'equazione della circonferenza C $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ **trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto A(2,3).**

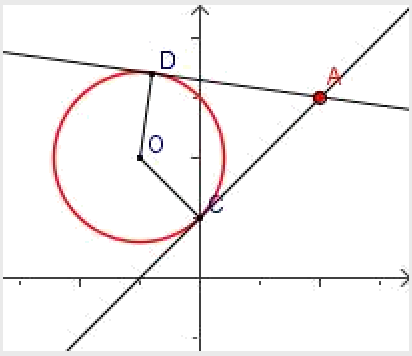
I modo

Il punto A è esterno alla circonferenza infatti se sostituiamo le coordinate di A nella circonferenza otteniamo $(2)^2+(3)^2+2(2)-4(3)+3=0$ → $8>0$ quindi troveremo due tangenti alla circonferenza uscenti da P. Scriviamo il fascio di rette che ha come sostegno P e lo mettiamo a sistema con l'equazione della circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y+3=0 \\ y-3=m(x-2) \end{cases}$$

l'equazione risolvente $x^2+(mx-2m+3)^2+2x-4(mx-2m+3)+3=0$ svolgendo $x^2(1+m^2)-2x(2m^2-m-1)-(4m-4m^2)=0$ applichiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$ $\frac{\Delta}{4}=(2m^2-m-1)^2+(1+m^2)(4m-4m^2)=0$ da cui $7m^2-6m-1=0$ e troviamo $m=1$ e $m=-\frac{1}{7}$ che se sostituiamo nell' equazione del fascio otteniamo le equazioni delle rette $y=x+1$ e $y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$

II modo



Il punto A è esterno alla circonferenza infatti se sostituiamo le coordinate di A nella circonferenza otteniamo $(2)^2+(3)^2+2(2)-4(3)+3=0$ → $8>0$ quindi troveremo due tangenti alla circonferenza uscenti da A. Scriviamo il fascio di rette che ha come sostegno A $y-3=m(x-2)$

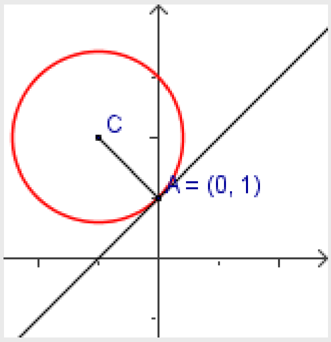
Calcoliamo le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-1,2)$ $r=\sqrt{1+4-3}=\sqrt{2}$

Poniamo la misura del raggio uguale alla distanza del fascio di rette dal centro della circonferenza $\frac{|m(-1)-(2)-2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$ $\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$ eleviamo al quadrato e facciamo il denominatore comune otteniamo $7m^2-6m-1=0$ da cui $m=1$ e $m=-\frac{1}{7}$ che se sostituiamo nell' equazione del fascio otteniamo le equazioni delle rette $y=x+1$ e $y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$

Esercizio guida

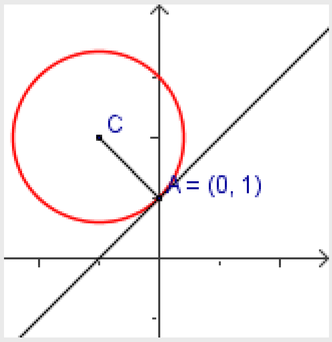
Esercizio Guida
Data l'equazione della circonferenza C $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto A(0,1).

I modo)



Il punto A appartiene alla circonferenza infatti se sostituiamo le coordinate del punto A nella circonferenza otteniamo $1^2-4(1)+3=0 \rightarrow 0=0$ quindi troveremo una sola tangente alla circonferenza passante per A. Scriviamo l'equazione del fascio di rette che ha come sostegno il punto A: $y-1=m(x-0)$. Dato che A□C sappiamo che la retta tangente che passa per A è perpendicolare alla retta su cui giace il raggio. Calcoliamo le coordinate del centro della circonferenza $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-1,2)$. Calcoliamo il coefficiente angolare della retta che passa per A e per C $m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-(-1)}{0-2}=-1$ troviamo il coefficiente della retta perpendicolare $m=-\frac{1}{m_{AC}}=1$ sostituiamolo nel fascio. Troviamo così la retta tangente $y=x+1$

II modo)



Il punto A appartiene alla circonferenza infatti se sostituiamo le coordinate del punto A nella circonferenza otteniamo
$1^2-4(1)+3=0 \rightarrow 0=0$
quindi troveremo una sola tangente alla circonferenza passante per il punto A.
Usiamo la regola dello sdoppiamento $xx_P+yy_P+a\frac{x+x_P}{2}+b\frac{y+y_P}{2}+c=0$ sostituiamo le coordinate del punto A e otteniamo $x(0)+y(1)+2\frac{x+0}{2}-4\frac{y+1}{2}+3=0$ da cui $x-y+1=0$ che è l'equazione della retta tangente

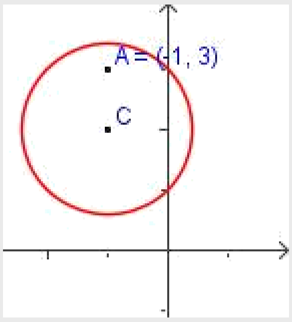
25. E' data la circonferenza di centro C(1, –2) e raggio 3, trovare l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa 3 $[5y+2\sqrt{5}x-7\sqrt{5}-10=0]$
26. E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+4y-151=0$ trovare l' equazione della retta tangente alla circonferenza nel suo punto A(-3,-4). [y+2x+2=0]
27. E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x-6y+7=0$ trovare l' equazione della retta tangente alla circonferenza nel suo punto $A(-1,3+\sqrt{5})$. $[x+\sqrt{5}y-3\sqrt{5}-4=0]$
28. Trova le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ condotte per il punto P(3 ;6).

   $[y=6,\ e\ y+60x-114=0]$

Esercizio guida

Data l'equazione della circonferenza C $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ **trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto A(-1,3).**

Il punto A è interno alla circonferenza infatti se sostituiamo le coordinate del punto A nella circonferenza otteniamo $(-1)^2+(3)^2+2(-1)-4(3)+3=0 \rightarrow -9<0$ quindi non esistono tangenti alla circonferenza passante per A. L'esercizio può dirsi concluso.



Risolviamo ugualmente e vediamo cosa otteniamo, usiamo il metodo della distanza.

Scriviamo il fascio di rette che ha come sostegno il punto A $y-3=m(x+1)$

Calcoliamo le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-1,2)$ $r=\sqrt{1+4-3}=\sqrt{2}$

Uguagliamo la misura del raggio alla distanza del fascio di rette dal centro della circonferenza $\frac{|m(-1)-(2)+m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$ $\frac{|+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$ eleviamo al quadrato e facciamo il denominatore comune otteniamo $2m^2+1=0$ che non ammette soluzioni per m. Quindi non esistono tangenti come ci aspettavamo

29. Trova le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ condotte per il punto B(3 ;5). [$y=5$, e $y=\frac{15}{8}x-\frac{5}{8}$]

30. Trova le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ condotte per il punto B(6 ;5). [y=5 , x=6]

31. Data l'equazione della circonferenza C : $x^2+y^2-4x-2y-11=0$ stabilire se i seguenti punti A(4,-1), B(6,1), C(7,-1) sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza.

[A interno, B appartiene, C esterno]

32. Data l'equazione della circonferenza C : $x^2+y^2+10x-2y+17=0$ stabilire se i seguenti A(-3,2), B(-2,1), C(-1,-2) punti sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza.
[A interno, B appartiene, C esterno]

33. Data l'equazione della circonferenza C : $x^2+y^2-10x-6y+9=0$ stabilire per quali valori di k il punto A(k-1,2) è interno, esterno o appartiene alla circonferenza
[A interno $6-\sqrt{23}<k<6+\sqrt{23}$, A appartiene $k=6-\sqrt{23} \vee k=6+\sqrt{23}$
A esterno $k<6-\sqrt{23} \vee k>6+\sqrt{23}$]

34. E' data la circonferenza C di centro $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ determina:
a) l' equazione della circonferenza;
b) i valori di k affinché la retta di equazione x+y-k=0 sia tangente alla circonferenza C .

[$x^2+y^2-3x-y+2=0; k=1 \vee k=3$]

Esercizio guida

Data l'equazione della circonferenza C $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ **trovare il valore del paramento q affinché la retta di equazione** $y=x+q$ **sia tangente alla circonferenza.**
Si può procedere in due modi:

I modo
mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza e quella del fascio di rette improprio
$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y+3=0 \\ y=x+q \end{cases}$ l'equazione risolvente è $x^2+(x+q)^2+2x-4(x+q)+3=0$ che svolgendo i calcoli $2x^2-2x(q-1)-(4q-q^2-3)=0$ applichiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$ $\frac{\Delta}{4}=(q-1)^2+2(4q-q^2-3)=0$ da cui $q^2-6q+5=0$ e troviamo due valori di q: $q=1$ e $q=5$, se li sostituiamo nell'equazione del fascio improprio otteniamo $y=x+1$ e $y=x+5$

II modo
troviamo le coordinate del centro e del raggio della circonferenza $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(-1,2)$ $r=\sqrt{1+4-3}=\sqrt{2}$
Poniamo la misura del raggio uguale alla distanza del fascio di rette dal centro della circonferenza $\frac{|-1-(2)+q|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ → $\frac{|-3+q|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ facendo il denominatore comune si ottiene $|q-3|=2$ da cui $q=1$ e $q=5$ che se le sostituiamo troviamo $y=x+1$ e $y=x+5$ che sono le equazioni delle rette tangenti

Condizioni generali per determinare l'equazione di una circonferenza

Ricordiamo

L'equazione di una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ dipende dai tre parametri a,b,c quindi per ricavare l'equazione dobbiamo avere tre relazioni indipendenti fra loro che ci permettano di determinare i parametri.
Ricordiamo che:
La conoscenza delle coordinate di un punto appartenente alla circonferenza rappresenta una condizione
La conoscenza delle coordinate del centro rappresenta due condizioni
La conoscenza delle coordinate di un punto di tangenza rappresenta due condizioni

Esercizio guida

Trovare l'equazione della circonferenza C che passa per il punto A(1,-1) e ha il centro C(-1,3)
Il punto deve appartenere alla circonferenza quindi sostituiamo le sue coordinate nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
Imponiamo il passaggio per A(1,-1) → $1^2+(-1)^2+(1)a+(-1)b+c=0$ →
$a-b+c+2=0$
Sappiamo che le coordinate del centro sono legate ai parametro a e b dalle seguenti relazioni : $a=-2\alpha$ → $a=-2$ $b=-2\beta$ → $b=2$ sostituiamo i valori dei parametri *a* e di *b* nella relazione trovata imponendo il passaggio par A e troviamo il parametro c $a-b+c+2=0$ → $-2-2+c+2=0$ → $c=-2$
l'equazione cercata è $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

Esercizio guida

Trovare l'equazione della circonferenza C che passa per i punti A(2,0), B(-1,1), C(0,-2)

Ogni punto deve appartenere alla circonferenza quindi sostituiamo le coordinate dei tre punti nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Imponiamo il passaggio per:

A(2,0) → $2^2+2a+c=0$

B(-1,1) → $(-1)^2+1^2+(-1)a+(1)b+c=0$

C(0,-2) → $(-2)^2+(-2)b+c=0$

Mettiamo a sistema le tre equazioni ottenute e ricaviamo il valore dei tre parametri a,b,c

$$\begin{cases}4+2a+c=0\\1+1-a+b+c=0\\2-2b+c=0\end{cases}\quad\begin{cases}c=-4-2a\\2-a+b-4-2a=0\\c=2b-2\end{cases}\quad\begin{cases}2b-2=-4-2a\\b-3a-2=0\\c=2b-2\end{cases}\quad\begin{cases}2(a+2)-2=-4-2a\\b=3a+2\\c=2b-2\end{cases}\quad\begin{cases}4a=-6\\b=3a+2\\c=2b-2\end{cases}\quad\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\b=-\frac{5}{2}\\c=-7\end{cases}$$

l'equazione cercata è $x^2+y^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y-7=0$

Esercizio guida

Trovare l'equazione della circonferenza C che passa per i punti A(0,2), B(-1,1) e il centro appartenente alla retta di equazione $y=2x-2$

Ogni punto deve appartenere alla circonferenza quindi sostituiamo le coordinate dei tre punti nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Imponiamo il passaggio per:

A(0,2) → $2^2+2b+c=0$

B(-1,1) → $(-1)^2+1^2+(-1)a+(1)b+c=0$

Se il raggio appartiene alla retta di equazione $y=2x-2$ significa che le sue coordinate $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ devono soddisfare l'equazione, quindi imponiamo il passaggio $-\frac{b}{2}=2(-\frac{a}{2})-2$ da cui $-b=-2a-4$ mettiamo a sistema le tre relazioni trovate e calcoliamo il valore dei parametri a,b,c

$$\begin{cases}4+2b+c=0\\1+1-a+b+c=0\\b=2a+4\end{cases}\quad\begin{cases}c=-4-2b\\1+1-a+b+c=0\\b=2a+4\end{cases}\quad\begin{cases}c=-4-2b\\2-a+(2a+4)+[-4-2(2a+4)]=0\\b=2a+4\end{cases}\quad\begin{cases}c=-4-2b\\3a=-6\\b=2a+4\end{cases}\quad\begin{cases}c=-12\\a=-2\\b=2(-2)+4\end{cases}$$

$\begin{cases}c=-4\\a=-2\\b=0\end{cases}$ la circonferenza cercata è $x^2+y^2-2x-4=0$

Esercizio guida

Trovare l'equazione della circonferenza C passante per i punti A(-1,1), B(3,-3) e tangente alla retta di equazione $y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$

Ogni punto deve appartenere alla circonferenza quindi sostituiamo le coordinate dei tre punti nell'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Imponiamo il passaggio per:

A(-1,1) → $(-1)^2+1^2-a+b+c=0 \rightarrow 2-a+b+c=0 \rightarrow b=a-c-2$

B(3,-3) → $(3)^2+(-3)^2+3a+(-3)b+c=0 \rightarrow 18+3a-3b+c=0$

I due punti ci hanno permesso ritrovare due condizioni dobbiamo quindi trovare la terza condizione, per fare ciò possiamo procedere in due modi:

I – modo: la condizione di tangenza $\Delta=0$

dobbiamo impostare un sistema con tre relazioni una per ogni parametro, due le abbiamo ottenute dall'appartenenza dei punti A e B alla circonferenza la terza la troviamo mettendo a sistema la retta tangente con la circonferenza e imponendo la condizione di tangenza cioè:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4} \end{cases}$$

possiamo ricavare dalle prime due equazioni i parametri *b* e *c* in funzione di *a* ossia:

$$\begin{cases} b=a-c-2 \\ 18+3a-3b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a-c-2 \\ 18+3a-3(a-c-2)+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a-c-2 \\ 18+3a-3a-3c+6+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a-c-2 \\ 4c+24=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a-c-2 \\ c=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=a-(-6)-2 \\ c=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} b=a+4 \\ c=-6 \end{cases}$$

sostituiamo questi parametri nell'equazione generica della circonferenza mettiamola a sistema con l'equazione della retta, imponiamo poi la condizione di tangenza

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+(a+4)y-6=0 \\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4} \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$x^2+\frac{9}{16}x^2+\frac{49}{16}+\frac{21}{8}x+ax+(a+4)(-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4})-6=0$$

da cui risolvendo i calcoli e facendo il denominatore comune otteniamo $25x^2+2x(2a-3)-28a-159=0$ che è un'equazione di secondo grado con il solo parametro *a* .

Imponiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$: $\frac{\Delta}{4}=(2a-3)^2-25(-28a-159)=0$ ricaviamo $4a^2+688a+3984=0$ $a^2+172a+996=0$ $a_{1,2}=-86\pm\sqrt{7396-996}=-86\pm 80$ come vediamo le circonferenze sono due avendo ottenuto due valori per il parametro a: $a_1=-6$ e $a_1=-166$ Possiamo ora ricavare anche gli altri parametri $\begin{cases} a=-6 \\ b=-2 \\ c=-6 \end{cases}$ e $\begin{cases} a=-166 \\ b=-162 \\ c=-6 \end{cases}$

Quindi le circonferenza trovate sono:

C_1 → $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ C_2 → $x^2+y^2-166x-162y-6=0$

II – modo:
la distanza dal centro della retta tangente è uguale al raggio
dobbiamo impostare un sistema con tre relazioni una per ogni parametro, due le abbiamo ottenute dall'appartenenza dei punti A e B alla circonferenza la terza la troviamo uguagliando la misura del raggio della circonferenza alla distanza della retta tangente al centro cioè:

$$\begin{cases} b = a - c - 2 \\ 18 + 3a - 3b + c = 0 \\ \dfrac{|3(-\frac{a}{2}) + 4(-\frac{b}{2}) + 7|}{\sqrt{9+16}} = \sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - c} \end{cases}$$

possiamo ricavare dalle prime due equazioni i parametri *b* e *c* in funzione di *a* ossia:

$$\begin{cases} b = a - c - 2 \\ 18 + 3a - 3b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a - c - 2 \\ 18 + 3a - 3(a - c - 2) + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a - c - 2 \\ 18 + 3a - 3a - 3c + 6 + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a - c - 2 \\ 4c + 24 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a - c - 2 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a - (-6) - 2 \\ c = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a + 4 \\ c = -6 \end{cases}$$

sostituiamo questi parametri nell'equazione che uguaglia distanza al raggio

$$\frac{|-\frac{3a}{2} - 2b + 7|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow \frac{|-3a - 4b + 14|}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

$$\frac{|-3a - 4(a+4) + 14|}{5} = \sqrt{a^2 + (a+4)^2 + 24} \rightarrow \frac{|-7a - 2|}{5} = \sqrt{2a^2 + 8a + 40}$$

eleviamo al quadrato e facciamo il denominatore comune $49a^2 + 4 + 28 = 50a^2 + 200a + 1000$ Abbiamo trovato un'equazione di secondo grado nel parametro a deduciamo che le soluzioni saranno due e quindi avremo due circonferenze che rispondono alle caratteristiche richieste $a^2 + 172a + 996 = 0$ da cui ricaviamo $a_{1,2} = -86 \pm \sqrt{7396 - 996} = -86 \pm 80$ $a_1 = -6$ e $a_1 = -166$

possiamo ricavare anche gli altri parametri $\begin{cases} a = -6 \\ b = -2 \\ c = -6 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = -166 \\ b = -162 \\ c = -6 \end{cases}$

le circonferenza trovate sono:

$C_1 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ $C_2 \rightarrow x^2 + y^2 - 166x - 162y - 6 = 0$

Esercizio guida

Trovare l'equazione della circonferenza C che ha centri in C(-1,2) ed è tangente alla retta di equazione $y = x + 1$

Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza tra il centro e la retta tangente quindi: $d = \dfrac{|m\alpha - \beta - mx_P + y_P|}{\sqrt{m^2+1}} = r$ **cioè** $r = d(CP) = \dfrac{|-1-2+1|}{\sqrt{1-1}} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ **possiamo ora scrivere l'equazione canonica della circonferenza** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$ **se svolgiamo i calcoli troviamo** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$

35. Trova l'equazione della circonferenza di centro C(1,2) passante per P(3,4).

[$x^2+y^2-5x-\frac{13}{3}y+4=0$]

36. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro C(– 5,– 4) tangente alla retta 2x+y+6 =0

[$x^2+y^2+10x+8y+\frac{142}{5}=0$]

37. Determina la circonferenza passante per *P*(2,-2) e tangente alla retta *r* di equazione *x*+2*y*+1=0 nel punto *A*(-1,0). [$x^2+y^2+15x+26y+14=0$]

38. Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti *A*(3 , 1) , *B* (0, -2) e avente l'ascissa del centro in 2 [$x^2+y^2-4x+2y=0$]

39. Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro in *A*(-2 , 0) ed è tangente alla retta *y*=-*x*+2 . [$x^2+y^2+4x-4=0$]

40. Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti *A*(-1;0), *B*(2;-1), *D*(3;-2) e disegnarne il grafico. [$x^2+y^2+2x+10y+1=0$]

41. Determina l'equazione della circonferenza di centro *C* (-2;-3) e con raggio uguale a 2 .

[$x^2+y^2+4x+6y+9=0$]

42. Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti *P*(-1;-1) , *P*(2 ; 1) e con il centro sulla retta *x*+2*y*-2=0 . [$x^2+y^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}y-\frac{15}{4}=0$]

43. Determina le equazioni delle circonferenze tangente agli assi cartesiani e avente raggio uguale a $\sqrt{2}$.

[$x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0; x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+2=0$]

44. Determina l' equazione della circonferenza tangente agli assi cartesiani e avente il centro in C(4;4).

[$x^2+y^2-8x-8y+16=0$]

45. Determina l' equazione della circonferenza situata nel II quadrante tangente agli assi cartesiani e avente il centro sulla retta 2x-y+1=0

(suggerimento: Il centro deve appartenere alla bisettrice del quadrante)

[$x^2+y^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=0$]

Circonferenze nel piano

Ricordiamo

Due circonferenze in un piano possono assumere diverse posizioni, possono essere: secanti, esterne, tangenti sia internamente che esternamente, interne sia concentriche che non concentriche.

Per stabilire se due circonferenze C $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e C1 $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ si intersecano dobbiamo mettere a sistema le equazioni delle due circonferenze cioè

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

se $a \neq a_1$ e $b \neq b_1$ possiamo applicare il metodo della riduzione sottraendo membro a membro e otteniamo l'equazione di una retta

$$(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0.$$

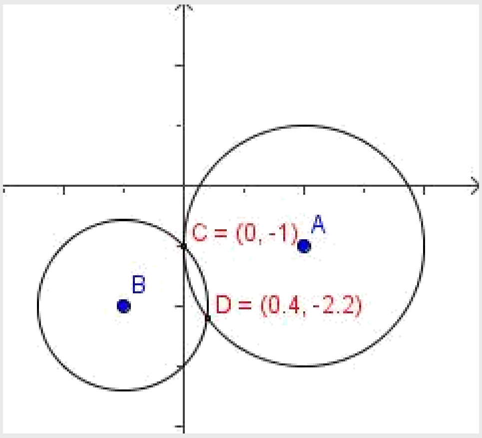
Questa retta è detta **asse radicale** ed è perpendicolare alla retta congiungente i centri delle due circonferenze. Il sistema iniziale si è quindi ridotto a

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0 \end{cases}$$

Se il sistema ammette due soluzioni distinte le circonferenze si intersecano
Se il sistema ammette una soluzione le circonferenze sono tangenti
Se il sistema non ammette soluzioni le circonferenze si non si intersecano

Esercizio guida

Date le equazioni delle circonferenze C) $x^2+y^2+2x+4y+3=0$ **e C$_1$)** $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ **trovare gli eventuali punti di intersezione**



Impostiamo il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+3=0 \\ x^2+y^2-4x+2y+1=0 \end{cases}$ **essendo** $a \neq a_1$ **e** $b \neq b_1$ **cioè** $2 \neq -4$ **e** $4 \neq 2$ **possiamo applicare il metodo della riduzione, sottraendo membro a membro il sistema diventa** $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+3=0 \\ 6x+2y+2=0 \end{cases}$

dove $6x+2y+2=0$ **è l'asse radicale**

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y+3=0 \\ y=-3x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(-3x-1)^2+2x+4(-3x-1)+3=0 \\ y=-3x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x^2-4x=0 \\ y=-3x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x(10x-4)=0 \\ y=-3x-1 \end{cases}$$

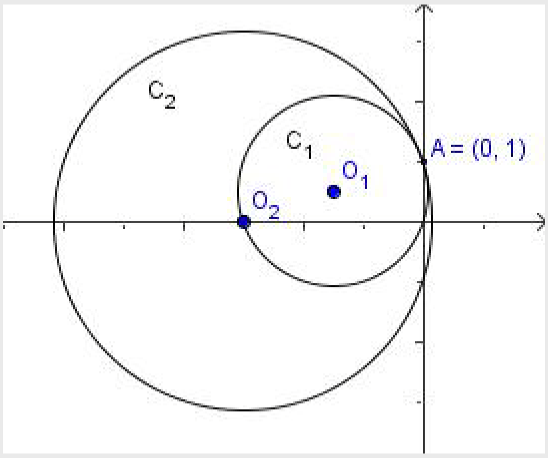
le due circonferenze si incontrano in due punti $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{11}{5} \end{cases}$ **i punti di contatto sono** $A(0,-1)$ **e** $B\left(\frac{2}{5},-\frac{11}{5}\right)$

Esercizio guida

Date le equazioni delle circonferenze C $x^2+y^2+3x-y=0$ **e** C_1 $x^2+y^2+6x-1=0$ **trovare gli eventuali punti di intersezione**

Impostiamo il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ x^2+y^2+6x-1=0 \end{cases}$ essendo $a \neq a_1$ e $b \neq b_1$ cioè $2 \neq -4$ e $4 \neq 2$ possiamo applicare il metodo della riduzione sottraendo membro a membro, il sistema diventa $\begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 \\ -3x-y+1=0 \end{cases}$ dove $y=-3x+1$ è l'equazione dell'asse radicale

$$\begin{cases} x^2+(-3x+1)^2+3x-(-3x+1)=0 \\ y=-3x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+9x^2-6x+1+3x+3x-1=0 \\ y=-3x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x^2=0 \\ y=-3x+1 \end{cases}$$



le due circonferenze sono tangente infatti $\begin{cases} x_1=x_2=0 \\ y_1=y_2=+1 \end{cases}$ e il punto di tangenza è A(0.1). per determinare se sono tangenti internamente o esternamente calcoliamo la distanza tra i due centri e la confrontiamo con la somma o la differenza dei due raggi: $C_1\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ $C_2(-3,0)$ la distanza $C_1C_2=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ calcoliamo la misura dei raggi $r_1=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ e $r_2=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ poiché $C_1C_2=r_2-r_1$ possiamo dedurre che la prima circonferenza è interna alla seconda.

46. Stabilire se le seguenti circonferenze $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ e $x^2+y^2-8x+2y-28=0$ sono secanti, esterne o tangenti. [si intersecano in (1;5) e (–2;–4)]

47. Determina l' equazione della circonferenza avente come diametro la corda comune alle due circonferenze $x^2+y^2-8x=0$ e $x^2+y^2-4y=0$.

[$x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{16}{5}y=0$]

48. Verifica che le due circonferenze di equazione $x^2+y^2-4y=0$ e $x^2+y^2-8x+7=0$ sono secanti e determinare l' equazione dell' asse radicale e della retta dei centri.

[8x-4y-7=0; x+2y-4=0]

Esercizi di riepilogo

49. Calcolare l' equazione della circonferenza di centro C(1, 1) e raggio 3. Stabilire se il punto A(2, 3) è interno, esterno, o sulla circonferenza . Stabilire se la retta r : 3x+4y+8 = 0 è secante, tangente, o esterna . Calcolare i punti d' intersezione tra la circonferenza e la retta s passante per il punto C e parallela ad r.

[$x^2+y^2-2x-2y-7=0$; A è interno; r è tangente; s:3x+4y –7= 0 interseca nei punti P(–7/5, 14/5) e Q(17/5,–4/5)]

50. Determinare la circonferenza passante per i punti A(1,2), B(0,-1), D(3,0).

[$2x^2+2y^2-5x-y-3=0$]

51. Data l' equazione $x^2+y^2+2x-2y+3=0$, stabilire se è una circonferenza

[No perché.......]

52. Sia C la circonferenza di centro C(1,–1) e raggio 1. Calcolare le equazioni delle rette tangenti passanti per i punti A(–1, 1),B(1, 0), ed O(0, 0).

[A → $y-1=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}(x+1)$; B interno nessuna tangente; O appartiene C x–y = 0]

53. Data la retta r di equazione y=-2x+1 determina la retta t perpendicolare a r passante per C(2;1). Sia A il punto di intersezione tra t e r e, B il punto di ascissa x=8 appartenente a r. Determina:

a) il perimetro e l' area del triangolo ABC;

b) la circonferenza avente come diametro BC;

Verifica che il punto A appartiene alla circonferenza e danne anche, una giustificazione geometrica.

[$2p(ABC)=\frac{46}{5}\sqrt{5}+2\sqrt{89}; A(ABC)=\frac{84}{5}; x^2+y^2-6x+14y-31=0$]

54. Dato il triangolo di vertici A(1;1), B(5;3) e C(-1;5), determina:

    a) l' equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC;

    b) le rette tangenti t in B e r in A;

    c) dopo aver verificato che il punto C è simmetrico di B rispetto al centro D della circonferenza, trova le equazioni delle rette parallele a t passante per C e parallela ad r passante per E, simmetrico di A rispetto a D;

    d) perimetro e area del triangolo ABC

    e) perimetro e area del parallelogramma MNPQ, dopo aver verificato che è un quadrato.

[$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$; y-3x+12=0, 3y+x-12=0; x+3y-24=0, y- 3x-8=0; $2p = 8\sqrt{5}, A = 20$; $2p = 8\sqrt{10}, A = 40$]

55. Dato il triangolo di vertici A(4;7), B(2;-1) e C(k;-3),determinare:

    a) le coordinate di C in modo che il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB;

    b) l' equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

[C(-21;-3); $x^2 + y^2 + \frac{46}{7}x - \frac{54}{7}y - \frac{191}{7} = 0$]

La Parabola

Equazione della parabola

Luogo geometrico

Ricordiamo

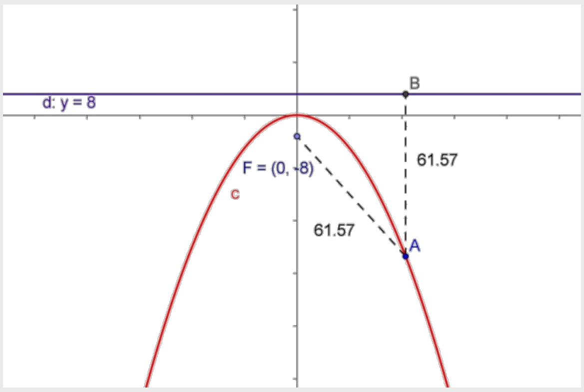
Si definisce Parabola il luogo dei punti del piano equidistante da un punto fisso detto **Fuoco** e da una retta d detta **direttrice**

Esercizio guida

Determinare il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto F(0; -8) e dalla retta di equazione y=8.

Consideriamo il punto A generico nel piano di coordinate (x; y). Sappiamo che il luogo richiesto è una parabola avente il fuoco in F (0; -8) e direttrice la retta d: y=8.
Per determinare l' equazione della parabola dobbiamo:

- Calcolare la distanza di A da F
- Calcolare la distanza di A dalla retta d
- Porre la condizione che le due distanze siano uguali $\overline{AF} = \overline{AB}$



Calcoliamo $AF = \sqrt{x^2 + (y+8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 64 + 16y}$

$AB = |y - 8|$ Abbiamo:

$\sqrt{x^2 + y^2 + 64 + 16y} = |y - 8|$

Eleviamo entrambi i membri al quadrato e otteniamo

$x^2 + y^2 + 64 + 16y = y^2 + 64 - 16y$

$32y = -x^2$ ricaviamo y e otteniamo $y = -\frac{1}{32}x^2$

equazione della parabola richiesta.

1. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto A(1,3) e dalla retta r di equazione y=2. $[y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3]$
2. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto A(-2,-4) e dalla retta r di equazione y=3. $[y = -\frac{1}{14}x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{11}{14}]$
3. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto $A(-\frac{1}{2};5)$ e dalla retta r di equazione y=5. $[y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{35}{8}]$

Equazione della parabola con vertice nell' origine

Ricordiamo

$y = ax^2$ **equazione della parabola con vertice nell' origine**

$F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ **fuoco,**

$y = -\frac{1}{4a}$ **l' equazione della direttrice**

Concavità

Se **a>0** la parabola ha la concavità rivolta verso l' alto, e al crescere di a l' apertura diminuisce.
Se **a<0** la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, e al decrescere di a
l' apertura diminuisce

Esercizio guida

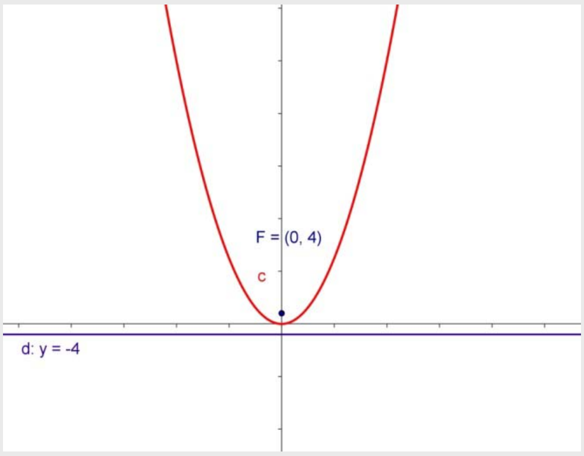
Determinare la concavità e l' equazione della parabola con il vertice nell'origine e avente il fuoco F di coordinate (0; 4).

L' equazione generica della parabola è $y = ax^2$. Dobbiamo determinare il valore del parametro a. Le coordinate generiche del fuoco sono $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, l'ordinata del fuoco vale 4, poniamo

$\frac{1}{4a} = 4$ sviluppiamo i calcoli $16a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$.

L' equazione della parabola è $y = \frac{1}{16}x^2$.

La concavità della parabola è verso l' alto perché il parametro a è positivo.



4. Determina la concavità delle seguenti parabole e disegnale:
   $y = -2x^2$; $y = 4x^2$; $4y = -8x^2$; $3y = 9x^2$
5. Data la parabola di equazione $y = ax^2$ determina il valore di a affinché abbia concavità verso il basso e il fuoco a distanza dall' origine O uguale a $\frac{4}{3}$. $[y = -\frac{3}{16}x^2]$
6. Una parabola di equazione $y = ax^2$ ha il fuoco di coordinate F(0;6). Quanto vale il coefficiente a? $[a = \frac{1}{24}]$
7. Per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2$ ha per direttrice la retta y=-3? $[a = \frac{1}{12}]$

8. Data la parabola di equazione $y = ax^2$ determinare a affinché il fuoco, di ordinata positiva, abbia distanza uguale a 10 dalla direttrice. $[a = \frac{1}{20}]$

9. Data la parabola di equazione $y = ax^2$ determinare i valori di a affinché il fuoco abbia distanza uguale a $\frac{1}{16}$ dalla direttrice. $[a = -8 \wedge a = 8]$

Equazione parabola con asse parallelo asse delle y

Ricordiamo

$y = ax^2 + bx + c$ equazione della parabola con asse parallelo all' asse y.

Le coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ L' asse di simmetria ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$

Il fuoco ha coordinate $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ La direttrice ha equazione $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

Casi particolari

Equazione parabola con asse di simmetria asse delle ordinate, vertice $V(0;c)$ $y = ax^2 + c$

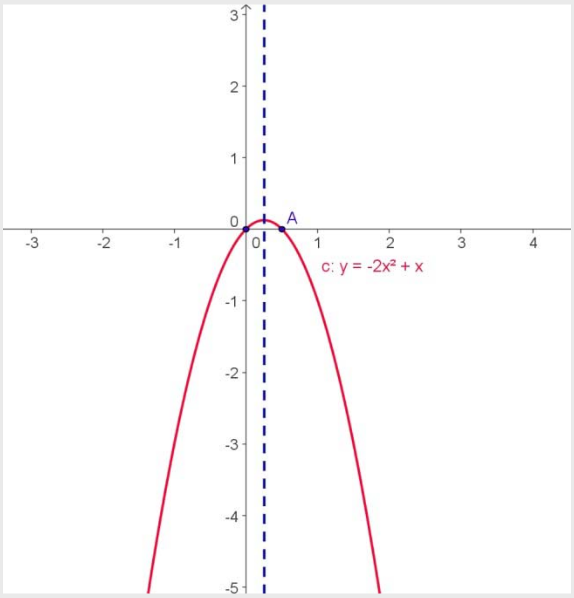
Equazione parabola che passa per origine degli assi : $y = ax^2 + bx$

Grafico della parabola

Per disegnare una parabola servono le coordinate del vertice, i punti di intersezione con l' asse x (se esistono) e il punto d' incontro con l' asse delle ordinate.

Esercizio guida

Assegnata la parabola di equazione $y = -2x^2 + x$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.



L' equazione della parabola è del tipo $y = ax^2 + bx$, quindi passa per l' origine degli assi cartesiani, inoltre a<0 quindi la concavità è verso il basso.
L'intersezione con l' asse y coincide con l'origine degli assi cartesiani.
Determiniamo le due intersezioni con l'asse x .
Un punto lo conosciamo è l' origine, l' altro lo calcoliamo risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -2x^2 + x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^2 + x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L' equazione di II grado è spuria.

$-2x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = \frac{1}{2}$ La parabola incontra l' asse x nel punto $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ Il vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ è $V\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$ L' asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$ è $x = \frac{1}{4}$

10. Assegnata la parabola di equazione $y=-4x^2+x$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

11. Assegnata la parabola di equazione $y=x^2-3x$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

12. Assegnata la parabola di equazione $y=x^2+6x$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

Esercizio guida

Assegnata la parabola di equazione $y=x^2-4$ disegnare il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

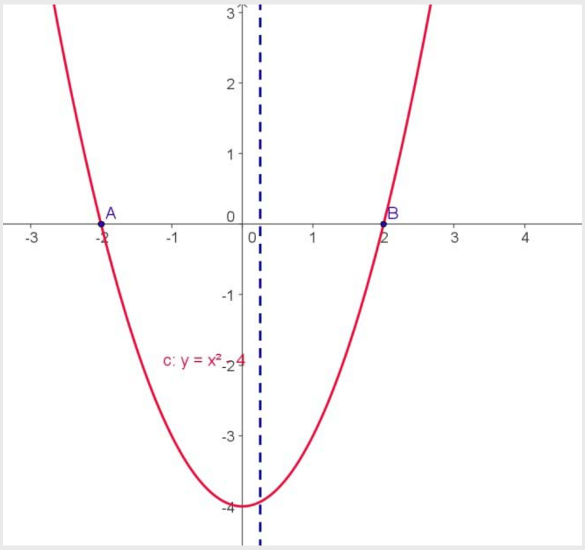
L' equazione della parabola è del tipo $y=ax^2+c$, quindi ha il vertice sull'asse y, inoltre a>0 quindi la concavità è verso l' alto.
Il vertice $V(0;c)$ è $V(0;-4)$
L' asse di simmetria è l' asse y.
L' intersezione con l' asse y coincide con il vertice.
Determiniamo le due intersezioni con l'asse x .

$$\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ y=0 \end{cases}$$

L' equazione di II grado è pura.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=-2 \wedge x=2$$

I punti d' incontro con l' asse x sono
$A(-2;0) \wedge B(2;0)$



13. Assegnata la parabola di equazione $y=x^2-6$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

14. Assegnata la parabola di equazione $y=-x^2+1$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

15. Assegnata la parabola di equazione $y=x^2+5$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

16. Assegnata la parabola di equazione $y=-x^2-9$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

Equazione parabola con asse parallelo asse delle x

Ricordiamo

$x = ay^2 + by + c$ equazione parabola con asse di simmetria parallelo all' asse x.

Le coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$ Il fuoco ha coordinate $F\left(\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$

L' asse di simmetria ha equazione $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$ La direttrice ha equazione $y = -\frac{b}{2a}$

Casi particolari

Equazione parabola con asse di simmetria asse delle ordinate, vertice $V(0;c)$ $x = ay^2 + c$

Equazione parabola che passa per origine degli assi $x = ay^2 + by$

Equazione della parabola con vertice nell' origine

$x = ay^2$ equazione della parabola con vertice nell' origine

$F\left(\frac{1}{4a},0\right)$ fuoco,

$x = -\frac{1}{4a}$ l' equazione della direttrice

17. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto A(1,3) e dalla retta r di equazione x=-2.

[$x=1/6y^2 - 6y+1=0$]

18. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto A(-2,-4) e dalla retta r di equazione x=3. [$x = \frac{1}{10}y^2 + \frac{4}{5}x + \frac{11}{10}$]

19. Determina il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto $A(-\frac{1}{2};5)$ e dalla retta r di equazione x=-5. [$x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{10}{9}y + \frac{1}{36}$]

20. Determina la concavità delle seguenti parabole e disegnale:

    a. $x=-2y^2$

    b. $x=4y^2$

    c. $4x=-8y^2$

    d. $3x=9y^2$

21. Data la parabola di equazione $x=ay^2$ determina il valore di a affinché abbia concavità verso sinistra e il fuoco a distanza dall' origine O uguale a $\frac{4}{3}$. [$x=-\frac{3}{16}y^2$]

22. Trovare fuoco e direttrice della parabola di equazione $x=\frac{1}{16}y^2$. [F(4;0), x=-4]

23. Disegna la parabola di equazione $x=y^2-5y+6$

24. Disegna la parabola di equazione $x=-y^2+2y-1$

25. Disegna la parabola di equazione $x=2y^2+3y-2$

26. Data la parabola di equazione $x=-y^2+9y-20$, determina le coordinate del vertice, del fuoco e l' equazione della direttrice e successivamente disegna il suo grafico.

27. Data la parabola di equazione $x=y^2+6y+8$, determina le coordinate del vertice, del fuoco e l' equazione della direttrice e successivamente disegna il suo grafico.

28. Assegnata la parabola di equazione $x=-4y^2+y$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

29. Assegnata la parabola di equazione $y=y^2-3y$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

30. Assegnata la parabola di equazione $x=y^2+6y$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

31. Assegnata la parabola di equazione $x=y^2-6$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

32. Assegnata la parabola di equazione $x=-y^2+1$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.
33. Assegnata la parabola di equazione $x=y^2+5$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.
34. Assegnata la parabola di equazione $x=-y^2-9$ disegna il suo grafico dopo aver determinato vertice, intersezioni con gli assi e asse di simmetria.

Posizione retta e parabola nel piano

Ricordiamo

Per determinare la posizione della retta di equazione $y = mx + q$ rispetto alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ bisogna svolgere il sistema tra l' equazione della retta e quella della parabola

$\begin{cases} y = mx + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ risolvendo si ottiene un' equazione risolvente di secondo grado.

Se $\Delta > 0$, l' equazione ammette due soluzioni reali e distinte. La retta è **secante**.
Se $\Delta = 0$ l' equazione ammette due soluzioni coincidenti. La retta è **tangente**
Se $\Delta < 0$, l' equazione non ammette soluzioni reali. La retta è **esterna**.

Esercizio guida

Verificare la posizione della retta di equazione y=x-4 rispetto alla parabola di equazione $y = x^2 + x - 20$

Per verificare la posizione della retta rispetto alla parabola dobbiamo svolgere il sistema tra l' equazione della retta e quello della parabola.

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x^2 + x - 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x^2 + x - 20 = x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Svolgiamo l'equazione di II grado $x^2 - 16 = 0$, è pura con $\Delta > 0$. La retta incontra la parabola in due punti distinti.

Condizione di tangenza

Ricordiamo

Se $P(x_1; y_1)$ è esterno alla parabola la condizione di tangenza è dato dal sistema tra la retta passante per P e l' equazione della parabola

$\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ con $\Delta = 0$

Se $P(x_1; y_1)$ appartiene alla parabola per determinare la retta tangente si può procedere in due modi:

a) Sistema tra retta passante per P e parabola, con la condizione di tangenza $\Delta = 0$

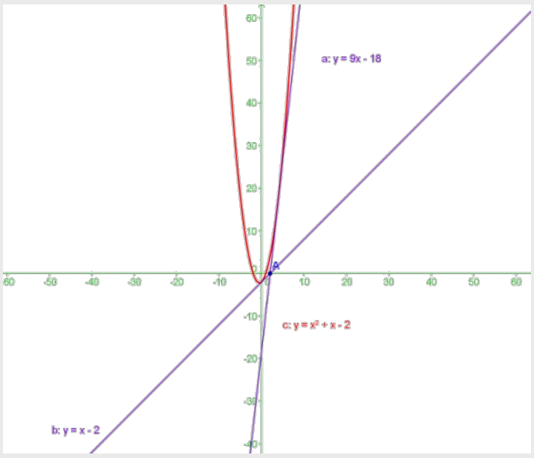
b) Utilizzare la formula dello sdoppiamento $\frac{y + y_1}{2} = ax_1x + b\frac{x + x_1}{2} + c$

c) Determinare il coefficiente angolare della retta tangente utilizzando la formula $m = b + 2ax_1$ e successivamente calcolare l' equazione della retta.

Per le rette tangenti alla parabola $x = ay^2 + by + c$ valgono le medesime condizioni.

Esercizio guida

Determinare l' equazione delle rette tangenti di centro A(2;0) esterno alla parabola di equazione $y = x^2 + x - 2$



Determiniamo il fascio di rette di centro A (2;0)

$y = m(x-2) \Rightarrow y = mx - 2m$

mettiamo in sistema l' equazione della parabola con il fascio proprio

$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = mx - 2m \end{cases}$ otteniamo un' equazione di II grado

$x^2 + (1-m)x - 2 + 2m = 0$

Poniamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ e otteniamo

$(1-m)^2 - 4(2m-2) = 0 \Rightarrow 1 + m^2 - 2m - 8m + 8 = 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0 \Rightarrow m_1 = 1 \wedge m_2 = 9$

Sostituiamo nell' equazione del fascio di centro A e troviamo le due rette tangenti. $t_1 : y = 9x - 18 \wedge t_2 : y = x - 2$

35. Data la parabola P di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e la bisettrice del primo e terzo quadrante. Determinare le coordinate dei loro punti di intersezione .

[$A(3-\sqrt{15};3-\sqrt{15})$; $B(3+\sqrt{15};3+\sqrt{15})$]

36. Data la parabola P di equazione $y = x^2 + 2$ e la retta r di equazione y=k, determina k affinché il triangolo avente per vertici i punti A e B d' intersezione di r con la parabola e il vertice V della parabola, abbia area uguale a 27. [k=11]

37. Data la parabola P di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ e il punto A(4;2) determina le equazioni delle rette tangenti alla P, uscenti da A. [x-y-2=0; 9x+y+34=0]

38. Data la parabola P di equazione $y = -x^2 + 4$ e il punto A(1;-5). Verifica che il punto A appartiene alla parabola e determina l' equazione della retta tangente alla P, uscente da A.

[2x+y+3=0]

39. Data la parabola P di equazione $y = -x^2 + 4x - 4$ e il punto A appartenente alla parabola di ascissa 3. Determina l' equazione della retta tangente alla P, uscente da A.
Sia B il punto d' intersezione della retta tangente con l' asse x e V il vertice della parabola. Determina l' area del triangolo AVB.

[2x+y-5=0; $B(\frac{5}{2};0)$; $A(AVB) = \frac{5}{2}$]

40. Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 3x - 2$ determina le coordinate del vertice , del fuoco, dell'asse di simmetria e le intersezioni con gli assi. Trova l'equazione della retta tangente che passa per il punto B(+1,-2) .

[$y = (-7 \pm 2\sqrt{6})(x+1)$]

41. Scrivere le equazioni delle tangenti condotte dal punto P(-2;-7) alla parabola di equazione $y = 2x^2 + 5x - 3$

[$y = -7x - 21$, $y = x - 5$]

42. Data la parabola di equazione y=x2 e la retta y=x+h, trovare il valore di h in modo che tale retta intercetti sulla parabola una corda di lunghezza 3

[$y = x + \frac{79}{8}$]

43. Data l'equazione della parabola $y = x^2 - 6x + 11$, trova le equazioni delle tangenti alla parabola nei punti M e N di ascissa rispettivamente 1 e 4, calcola poi il punto A di intersezione tra le rette tangenti e l'area del triangolo MAN. [$A = \frac{27}{4}$]

Condizioni generali per determinare l'equazione di una parabola

Ricordiamo

L'equazione di una parabola $y = ax^2 + bx + c$ dipende dai tre parametri a,b,c quindi per ricavare l'equazione dobbiamo avere tre relazioni indipendenti fra loro che ci permettano di determinare i parametri.
Ricordiamo che:
La conoscenza delle coordinate di un punto appartenente alla parabola rappresenta una condizione
La conoscenza delle coordinate del vertice o del fuoco rappresenta due condizioni
La conoscenza delle coordinate di un punto di tangenza rappresenta due condizioni
Se conosciamo il vertice e un punto della parabola , l' equazione è data dalla relazione $y - y_V = a(x - x_V)^2$

Esercizio guida

Determinare l' equazione della parabola di vertice V(0; -2) e passante per il punto A(2;3).

La parabola ha il vertice sull' asse y e avrà la forma $y = ax^2 + c$, inoltre possiamo dedurre che la parabola ha la concavità verso l' alto perché il vertice è sull' asse y negativo e passa per il punto A appartenente al I quadrante, quindi incontrerà l' asse x.
Determiniamo la sua equazione. Conosciamo il vertice e un punto utilizziamo l' equazione

$$y - y_V = a(x - x_V)^2 .$$

$y + 2 = ax^2$ imponiamo il passaggio per A $3 + 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{5}{4}$.

L' equazione della parabola è $y = \frac{5}{4}x^2 - 2$

Il segmento parabolico

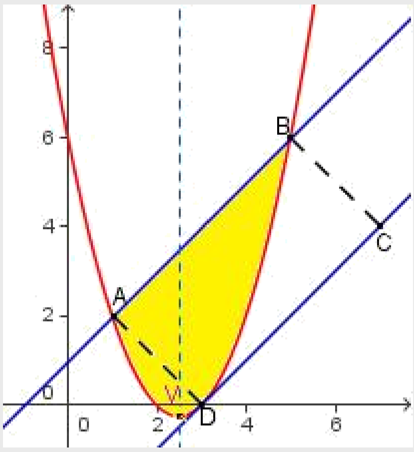
Ricordiamo

La regione finita S del piano delimitata dall'arco AVB di parabola e dal segmento AB viene detta segmento parabolico

L'area del segmento parabolico ABV è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo AA'BB'

Esercizio guida

Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$ e dalla retta r di equazione $y = x + 1$



Dobbiamo trovare l'area della regione di spazio colorata di giallo.

Ricordiamo che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo. Dobbiamo perciò trovare l'area del rettangolo ABCD.

Per fare ciò tracciamo e calcoliamo l'equazione delle retta tangente alla parabola e parallela alla retta r.

Mettiamo a sistema l'equazione delle parabola e del fascio di rette improprio, che hanno tutte coefficiente angolare uguale a quello della retta r, e imponiamo la condizione di tangenza

$\begin{cases} y = x + k \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$ troviamo l'equazione risolvente

$x^2 - 6x + 6 - k = 0$ imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ $\rightarrow$ $\Delta = 36 - 24 + 4k = 0 \Rightarrow k = -3$

l'equazione della retta cercata è $y = x - 3$

Troviamo i punti di intersezione tra retta e parabola $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 5x + 6 = x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$

Troviamo A(1;2) e B(5;6) troviamo la misura della corda $AB = \sqrt{(1-5)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$. Calcoliamo poi la distanza BC cioè la distanza di B dalla retta tangente $BC = \frac{|5-6-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ L'area del rettangolo è $A_{ABCD} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 16$

L'area del segmento parabolico è $A_P = \frac{2}{3} 16 = \frac{32}{3}$

44. Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 7x + 10$ e dalla retta di equazione $y = -2$ [$A = \frac{1}{3}$]

45. Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 1$ e dalla retta di equazione $y = -x + 3$ [$A = 4\sqrt{3}$]

46. Calcola l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 10x + 29$ e dalla retta di equazione $y = x + 1$

Esercizi di riepilogo

47. Scrivere l'equazione della parabola, avente l'asse parallelo all'asse delle y, passante per (2; 0), (4; 0) e (1; 1 $[y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}]$
48. Scrivere l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse delle y, tangente all'asse delle x in P(1, 0) e passante per A(0; 2). $[y=2x^2-4x+2]$
49. Trovare la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti A(-1;-2), B(1;2) e C(3;-6) [y=-2x2+3x+3]
50. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate passante per il punto A(0;1) e tangente all'asse delle ascisse nel punto B(1;0). $[y=x^2-2x+1]$
51. Trovare la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti A(-1;4), B(3;8) e C(1;2 [y=x2-x+2]
52. Determinare l'equazione della parabola tangente alla retta 2x-y-4=0 e avente il vertice nel punto V(1;-1) [y=x2-2x]
53. Determinare l'equazione della parabola avente il vertice nel punto V(-3; -2) e per direttrice la retta y= - 9/4 $[y=x^2+6x+7]$
54. Determinare l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse e passante per A(0; -2), B(0; 2), C(6; 1) $[x=-2y^2+8]$
55. Trovare l'equazione della parabola con fuoco F(3;0) e direttrice d=-3 $[x=\frac{1}{12}y^2]$
56. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y e passante per i punti A(0:3), B(4;0), C(6;9). $[y=\frac{7}{8}x^2-\frac{51}{12}x+3]$
57. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y e passante per il punto P(-1;2), e con vertice V(-2;3). $[y=-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{23}{9}]$
58. Determinare l'equazione della parabola avente per asse di simmetria l'asse y, per vertice l'origine delle coordinate e passante per il punto A(1; 4) $[y=4x^2]$
59. Determinare l'equazione della parabola avente per fuoco il punto F(0; -4) e per direttrice la retta y=2 $[y=-\frac{1}{12}x^2-1]$
60. Determinare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle y, avente il vertice nel punto V(3; 0) e passante per il punto P(0; 3). $[y=\frac{1}{3}x^2-2x+3]$
61. Determinare l'equazione della parabola passante per i punti A(-1;3) B(0;4) C(3;-5) $[y=-x^2+4]$
62. Determinare l'equazione della parabola passante per il punto P(-1,+2) e avente il vertice nel punto V (1 , 3) . $[y=-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{11}{4}]$
63. Determinare l'equazione della parabola di fuoco F (1, -1) e direttrice y = 4 . $[y=-\frac{x^2}{10}+\frac{x}{5}+\frac{7}{5}]$
64. Determinare l'equazione della parabola di fuoco F (1, -1) e vertice F (1, -3) . $[y=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}-\frac{23}{8}]$
65. Determinare l'equazione della parabola che incontra gli assi cartesiani nei punti A(-4 ,0) , B(0, -2) e ha il vertice sulla retta y = -4 $[y=\frac{3\pm\sqrt{2}}{8}x^2+(1\pm\sqrt{2})x-2]$
66. Determinare l'equazione della parabola avente il vertice in V(1;3) e passante per A(3;-1) $[y=-x^2+2x+2]$

67. Trovare le coordinate del vertice,del fuoco e le intersezioni con gli assi della parabola con equazione: $y = x^2 - 6x + 5$ [$V(3;-4)$, $F(3;-\frac{15}{4})$, A(0;5), B(5;0) e C(1;0)]
68. Date le parabole di equazione $x=y^2+4x$ e $x=-y^2+6y$, trovare la retta parallela all'asse delle y sulla quale le parabole staccano corde uguali [x=2]
69. Trovare l'area del segmento parabolico compreso tra la parabola di equazione $y=-x^2+1$ e la retta $y = x$ [$A = \frac{5\sqrt{5}}{6}$]
70. Trovare l'area della parte di piano compresa tra la parabola di equazione $y=-x^2+1$ e le rette $y = x$ e $y=x-1$ [$A = \frac{18-5\sqrt{6}}{6}$]
71. Trovare l'equazione delle parabola con asse parallelo all'asse delle x, tangente nel punto di ascissa zero alla retta y=x+2 e tangente ala retta y+x-1=0 [x=y2 -3y+2]
72. Trovare l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse delle y tali che P_1 passa per i punti A(1;1), B(2;6) e C(-2;-2) e P_2 che passa per il punto C(-1;-11) e con vertice V(3;5). Trova poi i punti d'intersezione tra le due curve e l'equazione della tangente comune.
[$y = x^2 + 2x - 2$, $y = -x^2 + 6x - 4$, P(1;1), $y = 4x - 3$]
73. Determina:
    a. l' equazione della parabola passante per A(1;2) avente per asse di simmetria la retta x=3 e tangente all' asse x.
    b. la circonferenza con centro coincidente con il vertice della parabola e avente raggio uguale alla misura del segmento VA;
    c. l' area del triangolo AVB, dove B è simmetrico di A rispetto all' asse di simmetria della parabola.

    [$y = \frac{1}{2}(x-3)^2$; $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$; A(AVB)=4]
74. Dato il triangolo di vertici A(0;4), B(4;0) e C(6;6). Verifica che è isoscele e determina le coordinate del baricentro G. Trova l' equazione della parabola passante per A,B e G e l'equazione della tangente in A alla parabola. [$G\left(\frac{10}{3};\frac{10}{3}\right)$ $y = \frac{19}{30}x^2 - \frac{53}{15}x + 4$;15y+53x-60=0]
75. Dopo aver determinato la parabola con vertice in V(2;1) e passante per A(1;3) e la circonferenza avente come diametro il segmento AV, calcolare le coordinate del punto C di tangenza tra la retta t : 4x+2y-5=0 e la circonferenza. Calcolare inoltre l' area del triangolo AVC.

    [$y = 2x^2 - 8x + 9; x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0; C(\frac{1}{2};\frac{3}{2}); \frac{5}{8}$]

76. Determina la circonferenza di centro C(3;3) e raggio 5. Considera:
    a. la retta r dei diametri parallela all' asse x, che incontra in A e B la circonferenza;
    b. la retta t dei diametri perpendicolare ad r.
    c. Sia D il punto di intersezione di t con la circonferenza e di coordinate positive.
    d. Determina l' equazione della parabola passante per A e B e avente il vertice in D.

    [$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$; A(-2;3) , B(8;3), D((3;8); $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{31}{5}$]
77. Determinare l'equazione della parabola passante per i punti A(2 , 0) , B(-2 , 1) e ha il vertice sulla retta y= 2x. [$y = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}x^2 - x + 1 \mp \sqrt{6}$]

L'ellisse

Equazione dell'ellisse

Luogo geometrico

Ricordiamo

Si chiama ellisse il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi.

Esercizio guida

Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui somma delle distanze dai punti A(-2;0) e B(2;0) è uguale a 7.

Considero i punti P(x,y) viene richiesto il luogo geometrico dato dalla relazione $PA+PB=7$ dovrò trovare quindi le distanze:

$PA=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+4+4x+y^2}$ e $PB=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+4-4x+y^2}$ le inserisco nella relazione $PA+PB=7$ e svolgo i calcoli $\sqrt{x^2+4+4x+y^2}+\sqrt{x^2+4-4x+y^2}=7$

$\sqrt{x^2+4+4x+y^2}=7-\sqrt{x^2+4-4x+y^2}$ elevo al quadrato

$x^2+4+4x+y^2=49+x^2+4-4x+y^2-14\sqrt{x^2+4-4x+y^2}$

da cui $14\sqrt{x^2+4-4x+y^2}=49-8x$ elevo nuovamente al quadrato

$196x^2+784-784x+196y^2=64x^2+2401-784x$ da cui $132x^2+196y^2=2401$ che è l'equazione di un'ellisse $\dfrac{x^2}{\frac{2401}{132}}+\dfrac{y^2}{\frac{2401}{196}}=1$

Equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse

Ricordiamo

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ equazione canonica dell'ellisse con centro nell'origine degli assi

$c^2=a^2-b^2$ e $b\in\Re^+$ quindi $a>b$ i fuochi sono sull'asse delle x

$F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$ fuochi $F_1(-\sqrt{a^2-b^2};0)$ $F_2(\sqrt{a^2-b^2};0)$

$a\rightarrow$ semiasse

$b\rightarrow$ semiasse

Esercizio guida

Data l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **determina le coordinate dei fuochi**

Trovo $a=4$ e $b=3$ essendo $a>b$ i fuochi sono sull'asse delle x trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(-\sqrt{a^2-b^2};0)$ $F_2(\sqrt{a^2-b^2};0)$ quindi $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ perciò $F_1(-\sqrt{7};0)$ $F_2(\sqrt{7};0)$

1. Trova il luogo geometrico dei punti P del piano la cui somma delle distanze dai punti

   A(-3;0) e B(3;0) è uguale a 10. $[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1]$
2. Trova il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti (-2;0), (2;0) vale

   $[\frac{x^2}{61}+\frac{y^2}{60}=1]$
3. Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano delle ellissi, trova i fuochi e scrivile in forma canonica:
   a. $9x^2+16y^2=144$
   b. $16x^2-9y^2=144$
   c. $4x^2+4y^2=144$
   d. $9x^2+25y^2=225$
   e. $4x^2+7y^2=56$
4. Trova per quali valori di k le equazioni date rappresentano un' ellisse:
   a) $\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{1-2k}=1$ $[\nexists x\in R]$
   b) $\frac{x^2}{3k-6}+\frac{y^2}{k+4}=1$ $[k>2]$
   c) $\frac{x^2}{k^2-1}+\frac{y^2}{9-k^2}=1$ $[-3<k<-1 \vee 1<k<3]$

Equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ordinate

Ricordiamo

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ equazione canonica dell'ellisse con centro nell'origine degli assi

$c^2=b^2-a^2$ e $a\in\Re^+$ quindi $a<b$ i fuochi sono sull'asse delle y

$F_1(0;-c)$ e $F_2(0;c)$ fuochi $F_1(0;-\sqrt{b^2-a^2})$ $F_2(0;\sqrt{b^2-a^2})$

$a\rightarrow$ semiasse

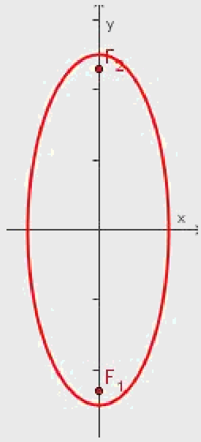
$b\rightarrow$ semiasse

Esercizio guida

Data l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **ricava le coordinate dei fuochi e disegna la curva**

Trovo $a=2$ e $b=5$ essendo $a<b$ i fuochi sono sull'asse delle y trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(0;-\sqrt{b^2-a^2})$ $F_2(0;\sqrt{b^2-a^2})$ quindi

$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$ perciò $F_1(0;-\sqrt{21})$ $F_2(0;\sqrt{21})$



5. Trova il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti (0;4), (0;-4) vale

$[\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1]$

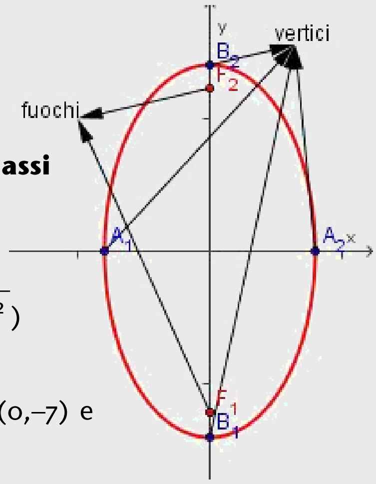
6. Stabilisci se le seguenti ellissi hanno fuochi sull'asse delle ascisse o delle ordinate e trova le coordinate dei fuochi:
   a. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{25}=1$
   b. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$
   c. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$
   d. $36x^2+25y^2=900$
   e. $4x^2+49y^2=196$

Caratteristiche dell'ellisse

Ricordiamo

- ha due assi di simmetria: asse delle x e asse delle y
- ha un centro di simmetria che è l'origine degli assi cartesiani
- può essere inscritta in un rettangolo i cui punti di contatto con la curva sono i punti A1, A2, B1, B2 di intersezione con gli assi cartesiani
- ha i **vertici** nei punti $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_2(0,-b)$ e $B_1(0,b)$
- ha i segmenti $\overline{A_1A_2}=2a$ e $\overline{B_1B_2}=2b$ chiamati **assi** se $a>b$, $\overline{A_1A_2}$ è detto **asse maggiore** e $\overline{B_1B_2}$ è detto **asse minore** mentre $\overline{OA_2}=a$ e $\overline{OB_2}=b$ sono chiamati **semiassi**, se $b>a$, $\overline{B_1B_2}$ è detto **asse maggiore** e $\overline{A_1A_2}$ è detto **asse minore** mentre $\overline{OA_2}=a$ e $\overline{OB_2}=b$ sono chiamati semiassi
- ha i punti F1 e F2 detti **fuochi** che si trovano sull'asse maggiore
- ha il segmento $\overline{F_1F_2}=2c$ chiamato **distanza focale** mentre $\overline{F_1O}=c$ semi distanza focale

Esercizio guida



Data l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$ ricava le coordinate dei fuochi, i punti di intersezione con gli assi, la misura degli assi e disegna la curva

Trovo $a=4$ e $b=7$ essendo $a<b$ i fuochi sono sull'asse delle y.

Trovo la misura degli assi $a=8$ asse minore e b=14 asse maggiore

Trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(0;-\sqrt{b^2-a^2})$ $F_2(0;\sqrt{b^2-a^2})$

quindi $\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ perciò $F_1(0;-3\sqrt{5})$ $F_2(0;3\sqrt{5})$

Trovo i punti di intersezione con gli assi i vertici $A_1(-4,0)$, $A_2(4,0)$, $B_2(0,-7)$ e $B_1(0,7)$

Scrivi l' equazione dell' ellisse avente i fuochi sull' asse x e con le caratteristiche assegnate:

7. a=2 e b=1 $[\frac{x^2}{4}+y^2=1]$

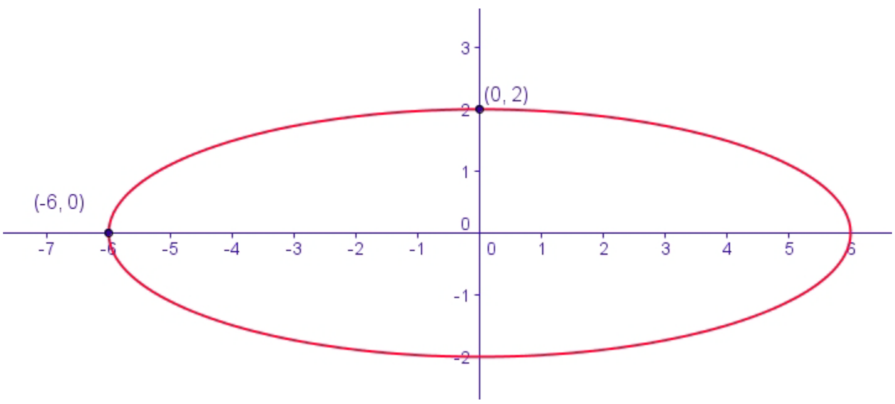
8. a=4 e b=3 $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1]$

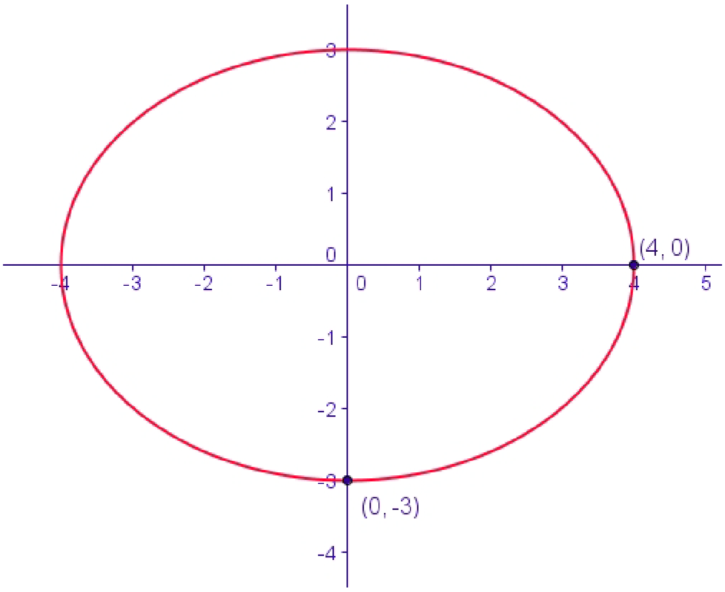
9. a=6 e b=5 $[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1]$

10. a=6 e c=2 $[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1]$

11. b=4 e c=3 $[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1]$

12. Determina l' equazione delle ellissi rappresentate, utilizzando i dati della figura e calcola le coordinate dei vertici e dei fuochi:





$$[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1; \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1]$$

Scrivi l' equazione dell' ellisse avente i fuochi sull' asse y e con le caratteristiche assegnate:

13. a=1e b=2 $[x^2+\frac{y^2}{4}=1]$

14. a=3 b=4 $[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1]$

15. a=5 e b=6 $[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1]$

16. a=6 e c=2 $[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{40}=1]$

17. b=4 e c=3 $[\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1]$

Eccentricità

Ricordiamo

L'eccentricità è quel parametro che mi determina di quanto l'ellisse è schiacciata

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse

$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ ellisse con i fuochi sull'asse delle ordinate

Il valore dell'eccentricità dell'ellisse deve essere $0 \le e < 1$

Esercizio guida

Data l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$ ricava l'eccentricità

Trovo $a=4$ e $b=7$, trovo il valore di c: $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Dato che l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle y, si avrà $e=\frac{c}{b}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ che è un valore minore di 1

Data l' equazione dell' ellisse determinare vertici, fuochi, eccentricità e disegna il suo grafico.

18. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{49}=1$
19. $25x^2+8y^2=200$
20. $4x^2+y^2=8$
21. $x^2+16y^2=32$
22. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{25}=1$

Ellisse e retta nel piano

Ricordiamo

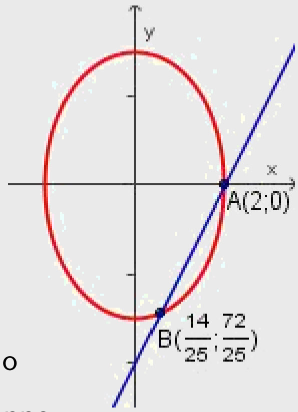
Una retta e un'ellisse nel piano possono: incontrarsi in due punti, non incontrarsi o incontrarsi in un solo punto.
Dato il sistema formato dall'equazione dell'ellisse e della retta

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+q \end{cases}$$

L'equazione risolvente è un'equazione di secondo grado nella variabile x o y

- Se, $\Delta > 0$ due soluzioni distinte la retta è **secante** due punti in comune con la curva
- Se, $\Delta < 0$ nessuna soluzione la retta e **esterna** nessun punto in comune con la curva
- Se, $\Delta = 0$ due soluzioni coincidenti la retta è **tangente**, un punto doppio in comune con la curva

Esercizio guida



Stabilire se la retta $y=2x-4$ **è secante, esterna o tangente all'ellisse di equazione** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Impostiamo il sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=2x-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x^2+4y^2=36 \\ y=2x-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x^2+4(2x-4)^2=36 \\ y=2x-4 \end{cases}$

L'equazione risolvente è $9x^2+4(4x^2+16-16x)-36=0 \Rightarrow 25x^2-64x+28=0$

Calcoliamo il Δ $\dfrac{\Delta}{4}=1024-700=324>0$ deduciamo che la retta e l'ellisse hanno due punti in comune quindi la retta è secante all'ellisse. Troviamo i punti in cui si incontrano:

$x_{1,2}=\dfrac{32\pm\sqrt{324}}{25}=\dfrac{32\pm18}{25}$ da cui $x_1=2$ e $x_2=\dfrac{14}{25}$ i punti che hanno in comune sono $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ e

$\begin{cases} x=\dfrac{14}{25} \\ y=\dfrac{72}{25} \end{cases}$

23. Stabilire se le seguenti ellissi e le relative rette sono secanti esterne o tangenti
    a. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2y^2}{9}=1$ e $x - y-1=0.$ [secante in P(1,-2) e $Q(\frac{7}{3};\frac{4}{3})$]
    b. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$ e $x - 3y=6.$ [tangente P(3;1)]
24. Trovare l'intersezione dell'ellisse, di semiassi rispettivamente a = 10 e b=8 , con la retta
25. passante per $P(3;\frac{16}{5})$ e di coefficiente angolare $-\frac{3}{5}$. [la retta è tangente in P]

26. Data l' equazione dell' ellisse $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ determinare la misura della corda individuata sulla retta y=x-1. $[\frac{8}{5}\sqrt{2}]$

27. Consideriamo l' ellisse di equazione $x^2+9y^2=9$ e il fascio di rette y=k. Determinare i valori di k affinché le rette stacchino una corda di lunghezza $\sqrt{3}$. $[k=\pm\frac{\sqrt{33}}{6}]$

Retta tangente all'ellisse

Ricordiamo

Per trovare l'equazione della retta passante per $P(x_P, y_P)$ tangente all'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ possiamo procedere in diversi modi:

1 metodo

Mettiamola a sistema con l'equazione dell'ellisse, con l'equazione del fascio di rette che ha come sostegno il punto $P(x_P, y_P)$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y-y_P=m(x-x_P)\end{cases}$$

Troviamo l' equazione risolvente che è un'equazione di secondo grado in x o in y, applichiamo la condizione di tangenza cioè poniamo il $\Delta=0$

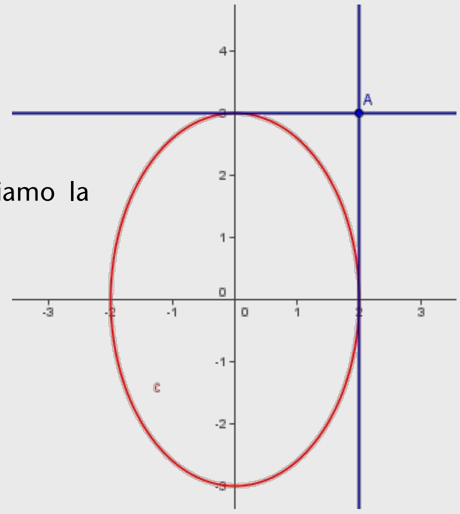
2 metodo

se il punto appartiene all'ellisse usiamo la regola dello sdoppiamento: sostituiamo nell'equazione canonica dell'ellisse $x^2 \to xx_P$, $y^2 \to yy_P$, e otteniamo l'equazione delle retta

$$\frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1$$

Esercizio guida 1

Trovare l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ passante per il punto A(2;3)



Determiniamo l' equazione della retta con centro in A. Utilizziamo la formula $y-y_A=m(x-x_A)$

Sostituiamo e otteniamo: y-3=m(x-2) → y=mx-2m+3.

Mettiamo in sistema con l' equazione dell' ellisse:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\\ y=mx-2m+3\end{cases}$$

Svolgiamo e otteniamo l' equazione

$$(9+4m^2)x^2-8m(2m-3)x+16m^2-48m=0$$

Poniamo la condizione di tangenza $\Delta=0$ e otteniamo

$m=0$ → y=3

m non definito →x=2

Esercizio guida 2

Trovare l'equazione delle tangenti all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ nei suoi punti A e B di ascissa -1.

Determiniamo l' ordinata dei punti A e B. Sostituiamo nell' equazione dell' ellisse la loro ascissa e otteniamo: $2+3y^2=6 \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

I punti appartengono all' ellisse quindi, per determinare l' equazione delle tangenti utilizziamo la formula dello sdoppiamento

$$\frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1$$

Sostituiamo le coordinate di A e troviamo l' equazione della retta tangente $x+\sqrt{3}y=1$

Sostituiamo le coordinate di B e troviamo: $x-\sqrt{3}y=1$

28. Determinare l' equazione delle rette tangenti all' ellisse di equazione $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ uscenti dal punto A (3;4). $[(6+\sqrt{15})x-3y-6(1+3\sqrt{15})=0; (6-\sqrt{15})x-3y-6(1-3\sqrt{15})=0]$
29. Dato il fascio di rette di equazione y=kx-2 determinare i valori di k affinché siano tangenti all' ellisse $x^2+4y^2=4$. $[k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}]$
30. Dato il fascio di rette di equazione y = - kx+1 determinare i valori di k affinché siano tangenti all'ellisse $3x^2+y^2=1$. $[k=0]$
31. Dato il fascio di rette di equazione y= - kx+1 determinare i valori di k affinché siano tangenti all' ellisse $3x^2+2y^2=6$. $[\nexists k x\in R]$
32. Data l' ellisse di equazione $9x^2+5y^2=45$, considera il punto P appartenente all' ellisse di ascissa -1, avente ordinata positiva e determina l' equazione della retta tangente in P alla conica. $[6\sqrt{5}y-9x-45=0]$
33. Data l' ellisse di equazione $4x^2+9y^2=36$ e la bisettrice del I quadrante, determina le coordinate dei loro punti di intersezione. Detto A il punto avente ordinata positiva calcolare l' equazione della retta tangente in A alla conica.
    Sia B il punto d' intersezione della retta tangente con l' asse y. Calcolare l' area del triangolo OAB. $[24\sqrt{13}x+54\sqrt{13}y-13=0; A(AOB)=\frac{1}{18}]$
34. Determinare il valore di k affinché l' ellisse $\frac{x^2}{3-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ sia tangente alla retta y=x+1. $[k\neq 1 \vee k\neq 3]$
35. Considera l' ellisse di equazione $6x^2+2y^2=12$ e il fascio di rette di equazione y=2kx-4. Determina i valori di k affinché le rette:
    a) intersecano l' ellisse; $[k<-\frac{\sqrt{5}}{2} \vee k>\frac{\sqrt{5}}{2}]$
    b) sono tangenti all' ellisse; $[k=-\frac{\sqrt{5}}{2}; k=\frac{\sqrt{5}}{2}]$
    c) sono esterne all' ellisse. $[-\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}]$

Condizioni generali per determinare l' equazione dell' ellisse

Ricordiamo

L'equazione di un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dipende dai due parametri a,b; perciò per trovare l'equazione dobbiamo avere due relazioni indipendenti fra loro che messe a sistema mi permettano di determinare i parametri.
Ad esempio:
La conoscenza della misura dei semiassi equivale a due condizioni
La conoscenza delle coordinate di ogni punto appartenente all'ellisse rappresenta una condizione
La conoscenza delle coordinate di un vertice corrisponde a una condizione
La conoscenza delle coordinate dei fuochi rappresenta una condizione
La conoscenza dell'eccentricità rappresenta una condizione

Esercizio guida

Trovare l'equazione dell'ellisse, con i fuochi sull'asse x, avente semiasse maggiore uguale a 3 e semiasse minore uguale a 2

Ricordando che i semiassi sono a e b avremo a=3 e b=2 sostituendo in $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ il valore di a e di b l'equazione dell'ellisse cercata sarà $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ che avendo a<b avrà i fuochi sull'asse delle ordinate

Esercizio guida

Trovare l'equazione dell'ellisse che ha per fuoco F(-4,0) il punto e asse minore 8

Dai dati che abbiamo ci accorgiamo che l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ascisse. La relazione che lega il semiasse alla coordinata del fuoco è $c^2=a^2-b^2$, il valore del semiasse minore è 4; possiamo trovare il valore quadrato del semiasse maggiore $a^2=b^2+c^2=16+16=32$ l'equazione dell'ellisse cercata è $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$

Esercizio guida

Trovare l'equazione dell'ellisse che ha per fuoco F(-3,0) e per eccentricità e = 1/3
Dai dati che abbiamo ci accorgiamo che l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ascisse.
La relazione che lega fuoco ed eccentricità è $e=\frac{c}{a}$ posiamo ricavare il valore del semiasse maggiore a $a=\frac{c}{e}=-\frac{3}{\frac{1}{3}}=-9$. Dobbiamo trovare ora il valore del semiasse b e usiamo la relazione $c^2=a^2-b^2$ da cui

$b^2=a^2-c^2=81-9=72$ l'equazione dell'ellisse cercata è $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$

36. Trovare l'equazione dell'ellisse che ha per fuoco il punto $F(0;2\sqrt{2})$ e semiasse minore 2

$[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1]$

37. Determina l'equazione dell'ellisse che passa per i punti A(2,-1) e B(-3,0) $[\frac{x^2}{9}+\frac{5y^2}{9}=1]$

38. Determina l'equazione dell'ellisse avente un vertice nel punto V(-4,0) e fuoco nel punto F(3,0)

$[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1]$

39. Scrivere l'equazione dell'ellisse avente per assi gli assi coordinati e passante per i punti A(2,3) e B(4,-1). $[\frac{2x^2}{35}+\frac{3y^2}{35}=1]$

40. Scrivi l'equazione dell'ellisse avente semiasse maggiore uguale a 4 e i fuochi di coordinate $F(\pm\sqrt{7};0)$.

$[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1]$

41. Scrivere l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse, di semiasse minore 2 e con eccentricità $e=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $[\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1]$

42. Scrivere l'equazione dell'ellisse con eccentricità $e=\frac{2}{3}$ e semiasse maggiore $a=3$.

$[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1]$

43. Dopo aver determinato l' equazione dell' ellisse passante per i punti A(0;3) e $B(1;\sqrt{5})$,calcolare l'area del triangolo ABC, dove C è il punto di intersezione tra le due rette tangenti all' ellisse in A e in B.

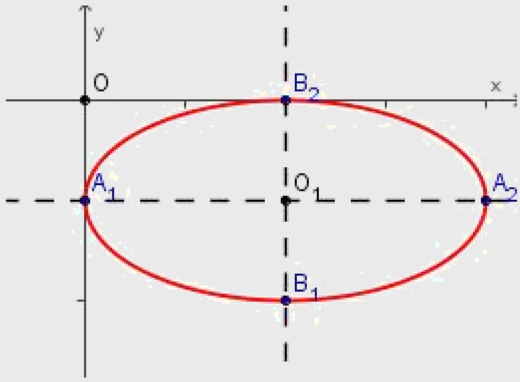
$[\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1; y=3 \wedge 3x+2\sqrt{5}y=18; A(ABC)=6-2\sqrt{5}]$

Ellisse traslata

Ricordiamo

$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$	equazione dell'ellisse traslata
$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$	equazione dell'ellisse traslata
$O'\left(-\frac{c}{2a};-\frac{d}{2b}\right)$	coordinate del centro dell'ellisse traslata

Esercizio guida



Date l'equazione $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$ **verifica che è l'equazione di un'ellisse traslata e trova centro semiassi, fuochi e vertici**

Dobbiamo trasformare l'equazione $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$ nella forma $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ per fare ciò usiamo il metodo del completamento dei quadrati:

$(x^2-4x+4)+(4y^2+8y+4)-4=0$ abbiamo aggiunto e tolto il valore 4 per poter avere il quadrato di un binomio anche nella seconda parentesi l'equazione può essere quindi scritta $(x-2)^2+(2y+2)^2=4$ l'equazione dell'ellisse traslata è data $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{4(y+1)^2}{4}=1$

cioè $\frac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$ Il centro è il è punto $O'\left(-\frac{c}{2a};-\frac{d}{2b}\right)=(2;-1)$

I semiassi sono dati a=2 e b=1. Gli assi di simmetria dell'ellisse sono x=2 e y =-1

Calcoliamo le coordinate dei vertici intersecando l'ellisse con i nuovi assi di simmetria risolviamo perciò i sistemi

$$\begin{cases}x^2+4y^2-4x+8y+4=0\\ y=-1\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-4x=0\\ y=-1\end{cases}\ \text{da cui}\ \begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\ \text{e}\ \begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+4y^2-4x+8y+4=0\\ x=2\end{cases}\quad \begin{cases}4y^2+8y=0\\ x=2\end{cases}\ \text{da cui}\ \begin{cases}y=0\\ x=2\end{cases}\ \text{e}\ \begin{cases}y=-2\\ x=2\end{cases}$$

I vertici avranno quindi coordinate : $A_1(0;-1)$, $A_2(4;-1)$, $B_2(2;0)$, $B_1(2;-2)$

Ricaviamo le coordinate dei fuochi ricordiamo che vale sempre $c^2=a^2-b^2$ quindi $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ perciò $F_1(\sqrt{3};-1)$ e $F_2(4-\sqrt{3};-1)$

44. Verifica che le seguenti equazioni rappresentano ellissi traslate e trova il nuovo centro di simmetria

a. $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$ [$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; $O' = (2;1)$]

b. $x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ [$\frac{(x-3)^2}{7} + \frac{2(y-1)^2}{7} = 1$; $O' = (3;1)$]

45. Scrivi l' equazione dell' ellisse avente il centro di simmetria in A(3;1), l' asse maggiore parallelo all'asse x lungo 6 e l' asse minore lungo 4. [$4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y - 99 = 0$]

46. Scrivi l' equazione dell' ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ traslata di vettore $\vec{v}(1;1)$.

[$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 11 = 0$]

Esercizi di riepilogo

47. Determina l'equazione dell'ellisse passante per i punti A(-4 , 0) , B(0, +2). Calcola le coordinate dei vertici , dei fuochi , le misure degli assi (maggiore e minore) e il valore dell'eccentricità

$$[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ F_1(-2\sqrt{3};0),\ F_2(2\sqrt{3};0),\ e=\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

48. Determinar l'equazione dell'ellisse passante per il punto P(+2,+1) e avente la misura dell'asse minore uguale a 3 . Determina quindi le coordinate dei vertici , dei fuochi e il valore dell'eccentricità .

$$[\frac{5x^2}{36}+\frac{4y^2}{9}=1;\ e=\frac{\sqrt{11}}{4}]$$

49. Determina l'equazione dell'ellisse con un fuoco di coordinate F2 (+2 , 0) ed un vertice di coordinate B (0, -3) . Determina quindi le coordinate dei vertici rimanenti, del secondo fuoco e il valore dell'eccentricità

$$[\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1;\ F_1(-2;0),\ F_2(2;0);\ e=\frac{2}{\sqrt{13}}]$$

50. Determina l'equazione dell'ellisse con un vertice di coordinate A(4 , 0) e avente come retta tangente y=2x+12 . $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{80}=1]$

51. Determina l'equazione dell'ellisse avente la somma dei semiassi uguale a 6 e la distanza tra i due fuochi uguale a 8 . $[\frac{9x^2}{169}+\frac{9y^2}{25}=1]$

52. Determina:
    a) l' equazione dell' ellisse avente come vertici A(3;0) e B(0;2);
    b) le coordinate del fuoco F, avente ascissa positiva, e la retta r passante per F e parallela all' asse y;
    c) le coordinate dei punti di intersezione E e G della retta r con la conica;
    e) le tangenti t e s alla conica in E e G;
    d) il punto d' intersezione D tra t e s e, dimostra che il triangolo DEG è isoscele;
    e) l' area del triangolo DEG. $[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;\ F(\sqrt{5};0);\ \sqrt{5}x\pm 3y=9;\ A(DEG)=\frac{16}{15}\sqrt{5}]$

L'iperbole

Equazione dell'iperbole

Luogo geometrico

Ricordiamo

Si chiama iperbole il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi F_1 and F_2 detti fuochi

Esercizio guida

Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-2;0) e B(2;0) è uguale a 7.

Considero i punti P(x,y) viene richiesto il luogo geometrico dato dalla relazione $PA - PB = 7$ dovrò trovare quindi le distanze:

$PA = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + 4x + y^2}$ e $PB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x + y^2}$

le inserisco nella relazione $PA - PB = 7$ e svolgo i calcoli $\sqrt{x^2 + 4 + 4x + y^2} - \sqrt{x^2 + 4 - 4x + y^2} = 7$

$\sqrt{x^2 + 4 + 4x + y^2} = 7 + \sqrt{x^2 + 4 - 4x + y^2}$ elevo al quadrato

$x^2 + 4 + 4x + y^2 = 49 + x^2 + 4 - 4x + y^2 + 14\sqrt{x^2 + 4 - 4x + y^2}$ da cui $14\sqrt{x^2 + 4 - 4x + y^2} = 8x - 49$ elevo nuovamente al quadrato $196x^2 + 784 - 784x + 196y^2 = 64x^2 + 2401 - 784x$ da cui $132x^2 + 196y^2 = 2401$

che è l'equazione di un'iperbole $\dfrac{x^2}{\frac{2401}{132}} - \dfrac{y^2}{\frac{2401}{196}} = 1$

1. Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-3;0) e B(3;0) è uguale a 10. [$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$]

2. Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-5;0) e B(5;0) è uguale a 20.

3. Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-2;0) e B(2;0) è uguale a 8.

4. Trova l'equazione del luogo geometrico dei punti P del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-4;0) e B(4;0) è uguale a 16.

Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse delle ascisse

Ricordiamo

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ equazione canonica dell'iperbole con centro nell'origine degli assi

$c^2 = a^2 + b^2$

$F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$ fuochi $F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0)$ $F_2(\sqrt{a^2+b^2};0)$

$a \to$ semiasse trasverso

$b \to$ semiasse non trasverso

$y = \pm\frac{b}{a}x$ equazione degli asintoti

Esercizio guida

Data l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ricava le coordinate dei fuochi, le equazioni degli asintoti.

Trovo $a = 4$ e $b = 3$ i fuochi sono sull'asse delle x - Trovo le equazioni degli asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$

Trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0)$ $F_2(\sqrt{a^2+b^2};0)$ quindi $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ perciò $F_1(-5;0)$ $F_2(5;0)$

5. Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano un' iperbole e trova i fuochi
   a. $9x^2 - 16y^2 = 144$
   b. $16x^2 - 9y^2 = 144$
   c. $4x^2 + 4y^2 = 144$
   d. $9x^2 - 25y^2 = 225$
   e. $4x^2 + 7y^2 = 56$

Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse delle ordinate

Ricordiamo

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ o $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$equazione canonica dell' iperbole con centro nell'origine degli assi

$c^2 = b^2 + a^2$

$F_1(0;-c)$ e $F_2(0;c)$ fuochi $F_1(0;-\sqrt{a^2+b^2})$ $F_2(0;\sqrt{a^2+b^2})$

$b \to$ semiasse trasverso

$a \to$ semiasse non trasverso

$y = \pm\frac{b}{a}x$ equazioni degli asintoti

Esercizio guida

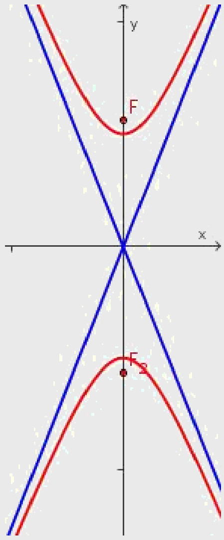
Data l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ **ricava le coordinate dei fuochi, le equazioni degli asintoti e disegna la curva**

Trovo $a=2$ e $b=5$ i fuochi sono sull'asse delle y.

Trovo le equazioni degli asintoti $y=\pm\frac{5}{2}x$

Trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(0;-\sqrt{a^2+b^2})$ $F_2(0;\sqrt{a^2+b^2})$ quindi

$\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ perciò $F_1(0;-\sqrt{29})$ $F_2(0;\sqrt{29})$



Stabilisci se le seguenti iperboli hanno fuochi sull'asse delle ascisse o delle ordinate e trova le coordinate :

6. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{25}=-1$
7. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$
8. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{5}=1$
9. $36x^2-25y^2=900$
10. $4y^2-49x^2=196$

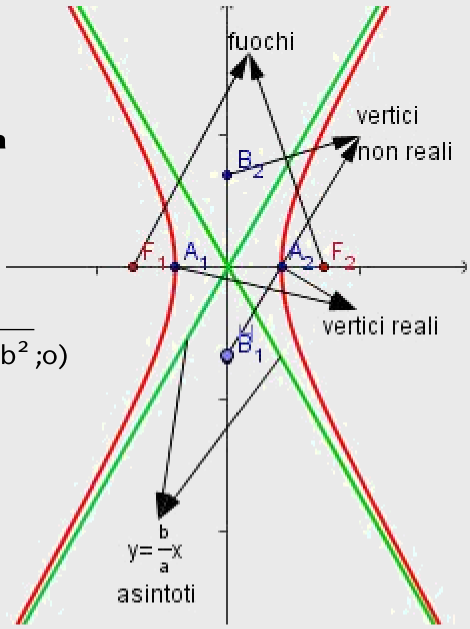
Caratteristiche dell'iperbole

Ricordiamo

- ha due assi di simmetria: asse delle x e asse delle y
- ha un centro di simmetria che è l'origine degli assi cartesiani
- ha i **vertici** nei punti $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_2(0,-b)$ e $B_1(0,b)$ se si trovano sull'asse dei fuochi sono detti vertici reali altrimenti vertici virtuali
- ha i segmenti $\overline{A_1A_2}=2a$ e $\overline{B_1B_2}=2b$ chiamati **assi** se i fuochi sono sull'asse delle x $\overline{A_1A_2}$ è detto **asse trasverso** e $\overline{B_1B_2}$ è detto **asse non trasverso** mentre $\overline{OA_2}=a$ e $\overline{OB_2}=b$ sono chiamati semiassi, se i fuochi sono sull'asse delle y, $\overline{B_1B_2}$ è detto **asse trasverso** e $\overline{A_1A_2}$ è detto **asse non trasverso** mentre $\overline{OA_2}=a$ e $\overline{OB_2}=b$ sono chiamati semiassi
- ha i punti F1 e F2 detti **fuochi** che si trovano sull'asse trasverso
- ha il segmento $\overline{F_1F_2}=2c$ chiamato **distanza focale** mentre $\overline{F_1O}=c$ semi distanza focale $y=\pm\frac{b}{a}x$ equazioni degli asintoti

Esercizio guida

Data l'equazione dell' iperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{49}=1$ ricava le coordinate dei fuochi, i punti di intersezione con gli assi, la misura degli assi gli asintoti e disegna la curva



Trovo $a=4$ e $b=7$ i fuochi sono sull'asse delle x.
Trovo la misura dell'asse trasverso $a=8$ e dell'asse non trasverso b=14
Trovo le coordinate dei fuochi ricordando $F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0)$ $F_2(\sqrt{a^2+b^2};0)$
quindi $\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$ perciò $F_1(\sqrt{53};0)$ $F_2(\sqrt{53};0)$
Trovo i punti di intersezione con gli assi i vertici $A_1(-4,0)$, $A_2(4,0)$ sono i vertici detti reali; $B_2(0,-7)$ e $B_1(0,7)$ sono i vertici detti non reali
Trovo gli asintoti $y=\pm\frac{7}{4}x$

Scrivi l' equazione dell' iperbole avente i fuochi sull' asse x e con le caratteristiche assegnate:

11. a=2 e b=1 $[\frac{x^2}{4}-y^2=1]$

12. a=4 e b=3 $[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1]$

13. a=6 e b=5 $[\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1]$

14. a=6 e c=2 $[\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{32}=1]$

15. b=4 e c=3 $[\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1]$

Scrivi l' equazione dell' iperbole avente i fuochi sull' asse y e con le caratteristiche assegnate:

16. a=1e b=2 $[x^2+\frac{y^2}{4}=1]$

17. a=3 b=4 $[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1]$

18. a=5 e b=6 $[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1]$

19. a=6 e c=2 $[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{40}=1]$

20. b=4 e c=3 $[\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1]$

Eccentricità

Ricordiamo

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ iperbole con i fuochi sull'asse delle ascisse

$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$ iperbole con i fuochi sull'asse delle ordinate

Il valore dell'eccentricità dell'iperbole deve essere $e>1$

Esercizio guida

Data l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ determina l'eccentricità

Trovo $a=3$ e $b=2$, trovo il valore di $c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Dato che l'iperbole ha i fuochi sull'asse delle x, si avrà $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ che è un valore maggiore di 1

Data l' equazione dell' iperbole determina vertici, fuochi, eccentricità e disegna il suo grafico.

21. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{49}=1$
22. $25x^2-8y^2=200$
23. $4x^2-y^2=8$
24. $x^2-16y^2=32$
25. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{25}=1$

Iperbole equilatera

Iperbole equilatera riferita ai propri assi

Ricordiamo

$x^2 - y^2 = a^2$ equazione iperbole equilatera $a^2 = b^2$

$F_1\left(-a\sqrt{2};0\right) \wedge F\left(a\sqrt{2};0\right)$ fuochi $c = \pm a\sqrt{2}$

$y = \pm x$ asintoti

$e = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} \Rightarrow e = \sqrt{2}$ eccentricità

Tra le seguenti equazioni riconosci quelle che rappresentano un' iperbole equilatera riferita ai propri assi.

26. $x^2 - 16y^2 = 1$
27. $x^2 - y^2 = 4$
28. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
29. $y^2 - x^2 = 32$
30. $x^2 + y^2 = 1$

Disegna le seguenti iperboli equilatere e scrivi le equazioni degli asintoti, dei vertici e dei fuochi. Calcola inoltre l' eccentricità.

31. $y^2 - x^2 = 4$
32. $y^2 - x^2 = 9$
33. $x^2 - y^2 = 8$
34. $x^2 - y^2 = 16$

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

Ricordiamo

$xy = k$ equazione iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

- se k>0 L' iperbole si trova nel I e III quadrante.

$F_1\left(\sqrt{2|k|};\sqrt{2|k|}\right) \wedge F_2\left(-\sqrt{2|k|};-\sqrt{2|k|}\right)$ fuochi

I vertici si possono determinare intersecando la curva con la bisettrice del I e III quadrante.

L' iperbole è simmetrica rispetto all' origine.

- se k<0 L' iperbole si trova nel II e IV quadrante.

$F_1\left(-\sqrt{2|k|};\sqrt{2|k|}\right) \wedge F_2\left(\sqrt{2|k|};-\sqrt{2|k|}\right)$ fuochi

I vertici si possono determinare intersecando la curva con la bisettrice del II e IV quadrante.

$A_1\left(-\sqrt{|k|};\sqrt{|k|}\right) \wedge A_2\left(\sqrt{|k|};-\sqrt{|k|}\right)$

L' iperbole è simmetrica rispetto all' origine.

Disegna le seguenti iperboli equilatere riferite ai propri asintoti e calcola i vertici.

35. $xy = 2$
36. $xy = 6$
37. $y = \frac{12}{x}$
38. $xy = -2$
39. $y = -\frac{1}{x}$
40. $y = \frac{1}{4x}$
41. $y = -\frac{1}{3x}$

Funzione omografica

Ricordiamo

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funzione omografica iperbole equilatera con $c \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0$

$O_1\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ centro di simmetria

$x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ asintoti paralleli agli assi

Se $c = 0$ la funzione assume la forma $y = \frac{ax+b}{d}$ che rappresenta l' equazione di una retta;

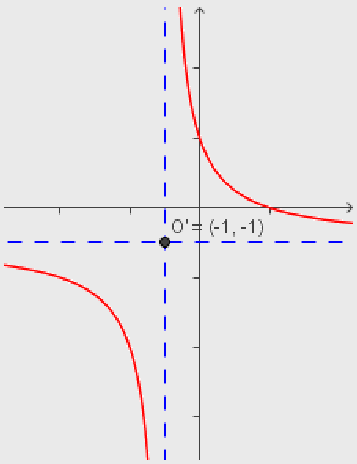
Esercizio guida

Data la funzione $y = \frac{-x+2}{x+1}$ **rappresentala graficamente**

E' una funzione omografica quindi, un'iperbole equilatera

Troviamo il centro $O\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right) \Rightarrow (-\frac{1}{1};\frac{-1}{1}) \Rightarrow (-1;-1)$

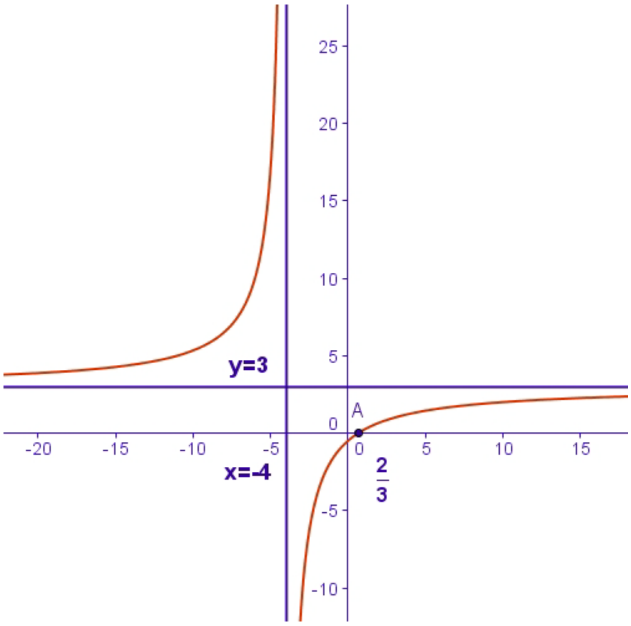
Troviamo gli asintoti $x = -\frac{d}{c} = -1$ e $y = \frac{a}{c} = -1$



42. Disegna il grafico delle seguenti funzioni orografiche:
   a. $y = \frac{x-4}{2x-1}$;
   b. $y = \frac{x+3}{x+2}$;
   c. $y = \frac{4x-8}{x+2}$;
   d. $y = \frac{x}{3x-2}$,

e. $y = \dfrac{3+6x}{x+2}$

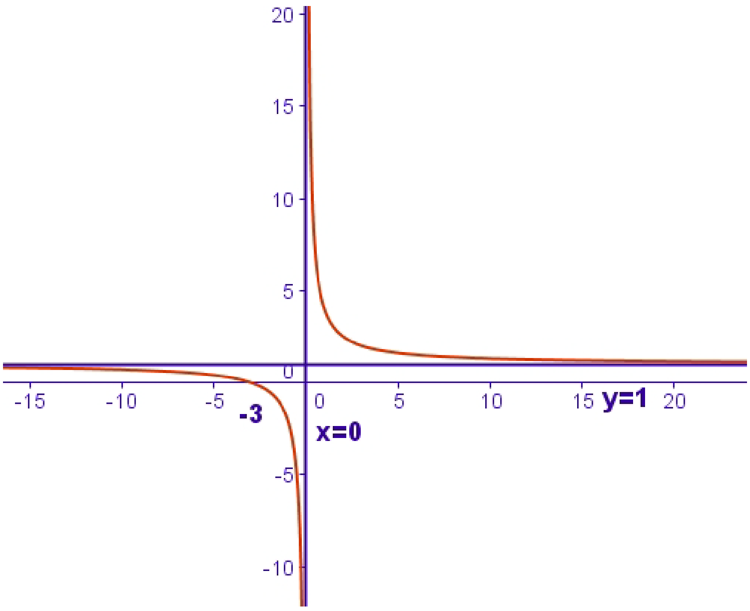
43. Utilizzando i dati riportati in figura, trova le equazioni delle funzioni orografiche, i loro assi e il centro



Equazione ____________________

Assi ____________________

Centro ____________________



Equazione ____________________

Assi ____________________

Centro ____________________

Iperbole e retta nel piano

Ricordiamo

Una retta e un'iperbole nel piano possono: incontrarsi in due punti, non incontrarsi o incontrarsi in un solo punto.

Dato il sistema formato dall'equazione dell'iperbole e della retta

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

L'equazione risolvente è un'equazione di secondo grado nella variabile x o y

- Se, $\Delta > 0$ due soluzioni distinte, la retta è **secante** due punti in comune con la curva
- Se, $\Delta < 0$ nessuna soluzione, la retta e **esterna** nessun punto in comune con la curva
- Se, $\Delta = 0$ due soluzioni coincidenti la retta è **tangente**, un punto doppio in comune con la curva

Esercizio guida

Stabilire se la retta $y = x - 2$ **è secante, esterna o tangente all'iperbole di equazione** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Impostiamo il sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 9x^2 - 4(x-2)^2 = 36 \\ y = x - 2 \end{cases}$

L'equazione risolvente è $9x^2 - 4(x^2 + 4 - 4x) - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 16x - 52 = 0$

Calcoliamo $\dfrac{\Delta}{4} = 64 + 260 = 324 > 0$ deduciamo che la retta e l'iperbole hanno due punti in comune quindi, la retta è secante all'iperbole.

Troviamo i punti in cui si incontrano: $x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{324}}{5} = \dfrac{-8 \pm 18}{5}$ da cui $x_1 = -\dfrac{26}{5}$ e $x_2 = 2$ i punti che hanno in comune sono $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\dfrac{26}{5} \\ y = -\dfrac{36}{5} \end{cases}$

44. Stabilisci la posizione tra le seguenti coppie di iperboli e rette:

a. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{2y^2}{9} = 1$ e $x - y - 1 = 0$. [secante in P(1,-2) e $Q(\frac{7}{3};\frac{4}{3})$]

b. $\dfrac{x^2}{18} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ e $x - 3y = 6$. [tangente P(3;1)]

45. Trova l'intersezione dell'iperbole riferita ai propri assi rispettivamente a = 10 e b=8 , con la retta passante per $P(3;\frac{16}{5})$ e di coefficiente angolare $-\frac{3}{5}$. [la retta è tangente in P]

46. Determina la lunghezza della corda staccata dall' iperbole di equazione $2x^2-y^2=2$ con la retta y=-x+2 [$4\sqrt{5}$]

48. Determina l' area del triangolo ABC, dove B è l'intersezione dell'iperbole equilatera $x^2-y^2=2$ con la retta r: y=x+1, A è il vertice di ascissa positiva e B il punto di ascissa 1 appartenente alla retta r. [$A=\frac{5}{4}\left(\sqrt{2}+1\right)$]

49. Dato il fascio di rette di equazione y=kx , determina per quali valori di k le rette staccano sull'iperbole di equazione $xy=1$ un corda di lunghezza 4. [$k=2\pm\sqrt{3}$]

50. Data l' iperbole di equazione $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ e la retta di equazione x=-4:
   a. determina le coordinate dei punti di intersezione A e B tra le retta e la conica;
   b. determina le coordinate dei fuochi dell' iperbole;
   c. considera il fuoco F_1 di ascissa positiva e il triangolo AF_1B;
   d. dopo aver dimostrato che il triangolo è isoscele, calcola l' area.

[$A\left(-4;-\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)$,$B\left(-4;\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)$; $A\left(\frac{24}{5}\sqrt{10}\right)$]

Retta tangente all'iperbole

Ricordiamo

Per trovare l'equazione della retta passante per $P(x_P,y_P)$ tangente all'iperbole possiamo procedere in diversi modi:

1 metodo

Mettiamo a sistema l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con l'equazione del fascio di rette, avente come sostegno il punto $P(x_P,y_P)$

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y-y_P=m(x-x_P)\end{cases}$ o $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\\ y-y_P=m(x-x_P)\end{cases}$ Troviamo l' equazione risolvente che è un'equazione di secondo grado in x o in y,e applichiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$

2 metodo

se il punto appartiene all'iperbole usiamo la regola dello sdoppiamento: sostituiamo nell'equazione canonica dell'ellisse $x^2\to xx_P$, $y^2\to yy_P$, e otteniamo l'equazione delle retta $\frac{xx_P}{a^2}-\frac{yy_P}{b^2}=1$ o $\frac{xx_P}{a^2}-\frac{yy_P}{b^2}=-1$

Esercizio guida

Data l'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ trovare le equazioni delle sue rette tangenti passanti per il punto P(3,-2).
Andiamo a sostituire il punto nell'equazione dell'iperbole così possiamo sapere quante tangenti dovremo trovare. Il punto P appartiene all'iperbole infatti $\frac{(3)^2}{3}-\frac{(-2)^2}{2}=1$ da cui si ottiene $\frac{9}{3}-\frac{4}{2}=1$. Possiamo procedere in due modi:

1. modo
Scrivo il fascio di rette che ha come sostegno P e lo metto a sistema con l'equazione dell'iperbole
$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1\\ y+2=m(x-3)\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-3y^2=6\\ y=mx-3m-2\end{cases}$ l'equazione risolvente $2x^2-3(mx-3m-2)^2-6=0$ che svolgendo i conti
$(2-3m^2)x^2+2x(9m^2+6m)-(27m^2+36m+18)=0$ applico la proprietà di tangenza $\Delta=0$
$\frac{\Delta}{4}=(9m^2+6m)^2+(2-3m^2)(27m^2+36m+18)=0$ da cui $36m^2+72m+36=0$ che è lo sviluppo del quadrato del binomio $36(m+1)^2=0$ e si trova $m=-1$
l'equazione della retta tangente è $y+x-1=0$

2. modo
Dato che il punto appartiene all'iperbole possiamo usare la regola dello sdoppiamento cioè $\frac{xx_P}{a^2}-\frac{yy_P}{b^2}=1$ sostituendo $\frac{x(3)}{3}-\frac{y(-2)}{2}=1$ svolgendo i calcoli otteniamo $y+x-1=0$ che è l'equazione della retta tangente in P

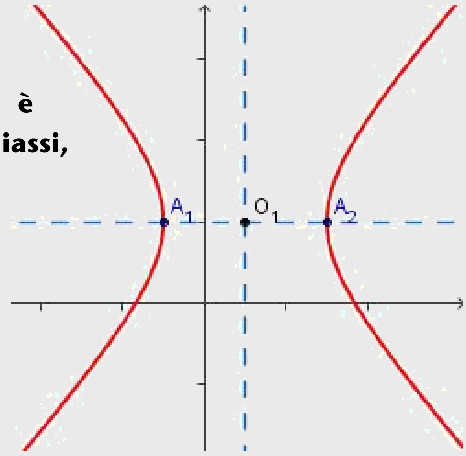
51. Data l'iperbole di equazione $\frac{y^2}{9}-x^2=1$ trovare l'equazione delle tangenti aventi coefficiente angolare $m=1$. $[y=x\mp2\sqrt{2}]$
52. Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $x^2-3y^2=1$ nel suo punto P(2 ;1). $[2x-3y=1]$
53. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ e la retta r di equazione x=-4, trova le equazioni delle tangenti all' iperbole nei punti d' incontro con r.
$[-4x+\sqrt{10}y=10;-4x-\sqrt{10}y=10]$
54. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ e il fascio di rette y=3x+k determina il valore di k affinché:
    a. la retta intersechi l'iperbole in due punti distinti; $[k<-\sqrt{35}\vee k>\sqrt{35}]$
    b. la retta sia tangente all'iperbole; $[k=-\sqrt{35}\vee k=\sqrt{35}]$
    c. la retta sia esterna all'iperbole; $[-\sqrt{35}<k<\sqrt{35}]$
55. Data l' iperbole di equazione $\frac{x^2}{k+1}-\frac{y^2}{4}=1$, determina i valori di k affinché l' iperbole sia tangente alla retta y-4x+2=0. $[k=-2\vee k=-\frac{11}{6}]$

Iperbole traslata

Ricordiamo

$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$	equazione dell'iperbole traslata
$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$	equazione dell'iperbole traslata
$O'\left(-\frac{c}{2a};-\frac{d}{2b}\right)$	coordinate del centro dell'iperbole traslata

Esercizio guida



Data l'equazione $5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$ verifica che è l'equazione di un'iperbole traslata e trova centro semiassi, fuochi e vertici

Dobbiamo trasformare l'equazione $5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$ nella forma $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ per fare ciò usiamo il metodo del completamento dei quadrati:

$(5x^2-10x+5)-5-(4y^2-16y+16)+16-31=0$ abbiamo aggiunto e tolto il valore 5 per poter avere il quadrato di un binomio nella prima parentesi, abbiamo aggiunto e tolto 16 per poter avere il quadrato di un binomio nella seconda parentesi.

L'equazione può essere quindi scritta $5(x-2)^2-4(y-2)^2=20$ l'equazione dell'ellisse traslata è data

$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$ dove il centro è il è punto $O'\left(-\frac{c}{2a};-\frac{d}{2b}\right)=(1;2)$

I semiassi sono dati a=1 e b=2.

Gli assi di simmetria dell'ellisse sono x=1 e y =2 $5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$

Calcoliamo le coordinate dei vertici intersecando l'ellisse con i nuovi assi di simmetria risolviamo perciò i sistemi

$\begin{cases}5x^2-4y^2-10x+16y-31=0\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2x+3=0\\y=2\end{cases}$ da cui $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ e $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$

I vertici avranno quindi coordinate : $A_1(-1;2)$, $A_2(3;1)$

Ricaviamo le coordinate dei fuochi ricordiamo che vale sempre $c^2=a^2+b^2$ quindi $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=\pm3$ perciò $F_1(-2;2)$ e $F_2(4;2)$

Condizioni generali per determinare l'equazione di un'iperbole

Ricordiamo

L'equazione di un'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,con i fuochi appartenenti a uno dei due assi cartesiani e centro nell'origine, dipende dai due parametri **a,b**; perciò per trovare l'equazione dobbiamo avere due relazioni indipendenti fra loro che messe a sistema mi permettano di determinare i parametri.

Alcuni casi che possono presentarsi più frequentemente:

- ✓ La conoscenza della misura dei semiassi equivale a due condizioni
- ✓ La conoscenza delle coordinate di ogni punto appartenente all'ellisse rappresenta una condizione
- ✓ La conoscenza delle coordinate di un vertice corrisponde a una condizione
- ✓ La conoscenza delle coordinate dei fuochi rappresenta una condizione
- ✓ La conoscenza dell'eccentricità rappresenta una condizione
- ✓ La conoscenza delle coordinate di un fuoco e dell'equazione di un asintoto corrisponde a due condizioni
- ✓ La conoscenza delle coordinate di un vertice e di un fuoco corrisponde a due condizioni
- ✓ Per determinare l'equazione di una iperbole equilatera, sia del tipo $x^2-y^2=a^2$ oppure $xy=k$ è sufficiente una sola condizione, che non sia la conoscenza degli asintoti e dell'eccentricità, costante per ogni iperbole equilatera. Tale condizione può essere, per esempio, il passaggio per un dato punto o la tangenza ad una retta.

Esercizio guida

Trova l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse delle ordinate e avente semiasse trasverso e uguale a 2 e semiasse non trasverso uguale a 3

Ricordando che i semiassi sono a e b avremo a=2 e b=3 sostituendo in $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ il valore di a e di b l'equazione dell'iperbole cercata sarà $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$

Esercizio guida

Trova l'equazione dell'iperbole che ha per fuoco il punto F(-4,0) e asse trasverso uguale a 6

Dai dati possiamo dedurre che l'iperbole ha i fuochi sull'asse delle ascisse. La relazione che lega il semiasse trasverso alla coordinata del fuoco è $c^2=a^2+b^2$, il valore del semiasse trasverso è 3;

calcoliamo il valore $b^2=c^2-a^2=16-9=7$ l'equazione dell'iperbole cercata è $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

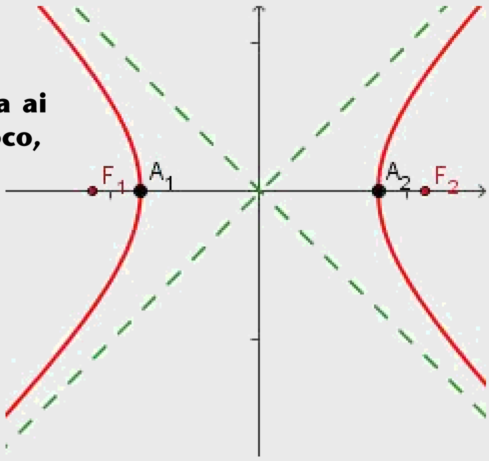
Esercizio guida

Trova l'equazione dell'iperbole che ha vertici in A(-2;0) e A(2;0) e eccentricità e = 2

Dai dati possiamo dedurre che l'iperbole ha i fuochi sull'asse delle ascisse.

La relazione che lega fuoco ed eccentricità è $e = \frac{c}{a}$. Possiamo ricavare il valore della semidistanza focale $c = e \cdot a = 4$. Dobbiamo trovare ora il valore di b. Usiamo la relazione $c^2 = a^2 + b^2$ da cui $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ l'equazione dell'iperbole cercata è $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

Esercizio guida



Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi passante per il punto P(-5;3). Trova poi fuoco, vertici e disegna la curva.

L'equazione che stiamo cercando è del tipo: $x^2 - y^2 = a^2$, dato che il punto P appartiene all'iperbole sostituiamo le coordinate per trovare il valore di a $(-5)^2 - 9 = a^2 \Rightarrow a^2 = 16$ quindi l'equazione è $x^2 - y^2 = 16$,

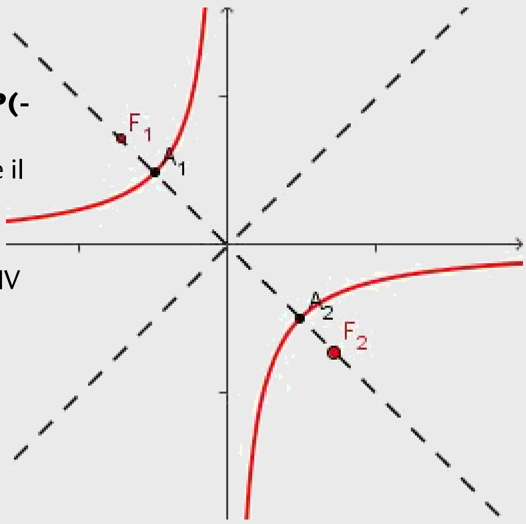
Troviamo le coordinate del fuoco $F_1(-a\sqrt{2};0) \wedge F(a\sqrt{2};0)$ cioè

$F_1(-4\sqrt{2};0) \wedge F(4\sqrt{2};0)$

Troviamo i vertici $A_1(-4;0) \wedge A_2(4;0)$

Gli asintoti sono le equazioni delle bisettrici dei quadranti cioè $y = \pm x$

Esercizio guida



Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti e passante per il punto P(-2;3). Trova fuoco, vertici e disegna la curva.

L'equazione che stiamo cercando è del tipo: $xy = k$, dato che il punto P appartiene all'iperbole sostituiamo le coordinate per trovare il valore di k $(-2)3 = k \Rightarrow k = -6$ quindi l'equazione è $xy = -6$, essendo k<0 il grafico si trova nel II e IV quadrante

Il semiasse trasverso $a = \sqrt{2|k|} = 2\sqrt{3}$

Troviamo le coordinate del fuoco

$F_1\left(-\sqrt{2|k|};\sqrt{2|k|}\right) \wedge F_2\left(\sqrt{2|k|};-\sqrt{2|k|}\right)$ cioè

$F_1\left(-\sqrt{12};\sqrt{12}\right) \wedge F_2\left(\sqrt{12};-\sqrt{12}\right)$ svolgo i calcoli

$F_1\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right) \wedge F_2\left(2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$

Troviamo i vertici $A_1\left(-\sqrt{|k|};\sqrt{|k|}\right) \wedge A_2\left(\sqrt{|k|};-\sqrt{|k|}\right)$ ossia $A_1\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right) \wedge A_2\left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$

56. Trova l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, passante per il punto A(1;-5) [$xy=-5$]
57. Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse delle x, passante per i punti A(2,-3) e B(-4,7) [$\frac{10x^2}{13}-\frac{3y^2}{13}=1$]
58. Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse delle x che passa per il punto A(3;-1) e fuoco nel punto $F(2\sqrt{2};0)$ [$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$]
59. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente per assi gli assi coordinati e passante per i punti A(2;3) e B(4;7) [$\frac{10x^2}{13}-\frac{3y^2}{13}=1$]
60. Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha i vertici in $V(\pm 3;0)$ e distanza focale uguale a 10. [$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$]
61. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente per vertici $V(\pm 2;0)$ e fuochi $F(\pm\sqrt{7};0)$. [$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$]
62. Scrivi l'equazione dell'iperbole con vertici $F(\pm 2\sqrt{2};0)$ e passante per il punto $F(4;-\sqrt{6})$.[$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}=1$]
63. Scrivi l'equazione dell'iperbole con asintoti $y=\pm\frac{3}{4}x$. [$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$]
64. Determina l' equazione dell' iperbole passante per A(-1;1) e tangente in A alla retta y-1=m(x+1). [$2x^2-y^2=1$]
65. Determina l' equazione dell'iperbole $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ passante per A(1,2) e avente centro in C(-2;3). [$y=\frac{3x+3}{x+2}$]
66. Determina l' equazione dell'iperbole $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ avente centro in C(3;-2) e tangente alla retta y=x-3 [$y=\frac{-2x-5}{x-3}$]

Esercizi di riepilogo

67. Determina l'equazione dell'iperbole con semidistanza focale uguale a 4 e semiasse trasverso uguale a 2 . [$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$]

68. Determina l'equazione dell'iperbole con un fuoco nel punto *F* (4,0) e con asse trasverso pari a 5 . Calcolare inoltre il valore dell'eccentricità. [$\frac{4x^2}{25}-\frac{4y^2}{39}=1; e=\frac{8}{5}$]

69. Determina l'equazione dell'iperbole con un fuoco nel punto *F* (0, -6) e con eccentricità pari a 2 . Determina, inoltre, le coordinate dei vertici e le equazioni degli asintoti . [$\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=-1; y=\pm\frac{1}{3}x$]

70. Determina l'equazione dell'iperbole con un vertice nel punto *V* (0 , 4) e passante per il punto di coordinate *P*(1 , 6) . Calcola, inoltre, i fuochi e gli asintoti . [$\frac{5x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=-1; F(0;\pm2\sqrt{\frac{21}{5}}); y=\pm2\sqrt{5}x$]

71. Determina l'equazione dell'iperbole passante per il punto *T* (3;2) e tangente alla retta di equazione *y*=-*x*+6 . [$\frac{5x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=-1$]

72. Determina l' equazione dell'iperbole equilatera che stacca sulla retta di equazione y=4 una corda di lunghezza 16.
Siano A e B due punti di ascissa 8 appartenenti all'iperbole. Dopo aver calcolato le tangenti in tali punti alla conica, determina l' area del triangolo ABC, dove C è il punto d'intersezione delle due rette tangenti. [$x^2-y^2=48; 2x-y=12, 2x+y=12, A(ABC)=8$]

73. Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per A(2;0) e avente il centro in C(4;4). Calcola per quale valore di k le rette y=-x+k sono tangenti all'iperbole e,successivamente, verifica che i punti di tangenza coincidono con i vertici della funzione omografica.
Trova, inoltre, il perimetro del quadrilatero DEFG, i cui vertici sono i punti d' incontro delle tangenti con gli assi. [$y=\frac{4x-8}{x-4};\ y=-x+8\pm4\sqrt{2};\ 2p=32\sqrt{2}$]

74. Determina l' equazione dell' iperbole equilatera avente i vertici in A(2;0) e B(2;0) e l' equazione della parabola con vertice in A e passante per il punto C(6;4). [$x^2-y^2=4; y=x^2-4x+4$]

75. Determina l' equazione dell' iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$ tangente alla retta r, sapendo che r è parallela alla retta di equazione y=x+5 e passa per A(1;2). [$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$]